

UNTERSUCHUNG DER SPEKTREN SCHNELLER
NUKLEONEN NACH MYONABSORPTION AN $^{16}_0$

von

Jürgen Richter

aus

Ilmenau / Thüringen

1976

1977 № 65



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546226_0059

UNTERSUCHUNG DER SPEKTREN SCHNELLER NUKLEONEN NACH MYONABSORPTION AN ^{16}O

**Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg**

**zur
Erlangung des Doktorgrades**

vorgelegt

von

Jürgen Richter

aus

Ilmenau / Thüringen

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen -Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 26. 5. 1976

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Remmert

Erstberichterstatte: Professor Dr. M.G.Huber

Zweitberichterstatte: Professor Dr. H. Ruder

Vorbemerkung zur physikalischen Motivation und zum Ziel
der vorliegenden Arbeit

μ -Absorptionsprozesse können als Probe der Kernstruktur betrachtet werden und geben somit einen Test für Vorstellungen über die Kernstruktur ab.

Dieses hat einen Grund darin, daß die Myon-Kern-Wechselwirkung nicht mit der Wechselwirkung der Nukleonen untereinander identisch ist. Darüberhinaus kommt einer Kernstrukturuntersuchung zugute, daß die schwache Wechselwirkung in ihrer Struktur wohlbekannt ist und (wie ihr Name sagt) nur schwach ans nukleare System ankoppelt, so daß bereits eine Berücksichtigung in erster Ordnung hinreichend ist. Eine Motivation zur genaueren Kernstrukturuntersuchung mit Myonen gibt die experimentelle Evidenz von Reaktionen nach μ -Absorption, die mit dem einfachen Bild des Einteilchenschalenmodells nicht in Einklang sind.

Es sind dies:

- (i) hoher Beitrag schneller Neutronen (Energie bis 90 MeV zum Neutronemissionsspektrum;
- (ii) Emission geladener Teilchen mit hohem Impuls;
- (iii) Mehrnukleonenemission.

Dabei bewirken die im Schalenmodell berechneten Übergänge, wie Neutronenspektren und Verdampfungsspektrum, zwar den Hauptanteil zur μ -Absorption. Aber sowohl die Spektren schneller Neutronen als überhaupt die Spektren geladener Teilchen lassen sich mit einem Einteilchenbild des Atomkerns nicht

mehr erklären.

Die in Zukunft zugänglichen höheren Myonenflüsse machen eine genauere Ausmessung der Spektren schneller Nukleonen nach μ -Absorption durchaus wünschenswert, lassen sich doch daran Anregungseigenschaften des nuklearen Systems kontinuierlich bis zu Energieüberträgen von etwa 100 MeV studieren.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, Art und Einfluß der Abweichungen vom Schalenmodell auf experimentell beobachtbare Größen, nämlich

n - Spektren,

p - Spektren

und d - Spektren

abzuschätzen.

UNTERSUCHUNG DER SPEKTREN SCHNELLER NUKLEONEN
NACH MYONABSORPTION AN ^{16}O

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	<u>Seite</u>
I. <u>Einleitung</u>	5
II. <u>Kinematik und Energieverhältnisse</u>	10
II.1 Übergangswahrscheinlichkeit und Klassifizierung der Reaktionen	
II.2 Phasenraumbetrachtungen	
II.3 Energetische Verhältnisse	
III. <u>Nichtrelativistischer Ansatz für die elementare Wechselwirkung</u>	23
III.1 Die relativistische Form der Wechselwirkung	
III.2 Nichtrelativistische Reduktion der schwachen Wechsel- wirkung	
III.3 Galilei-invariante Wechselwirkung	
III.4 Schwache Wechselwirkung für Myon-Absorption	
IV. <u>Streuoperator für Myon-Absorption</u>	31
IV.1 Vorbemerkung	
IV.2 SRC-Formalismus	
IV.3 Pion-Austausch bei hohem Impulstransfer	
V. <u>Matrixelemente bei Myon-Absorption</u>	48
V.1 Allgemeine Eigenschaften	

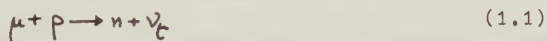
V.2	Matrixelemente	
VI.	<u>Experimentelle und Theoretische Situation</u>	64
VI.1	Experimente	
VI.2	Theoretische Situation	
VII.	<u>Ergebnisse aus eigenen Rechnungen</u>	71
VII.1	Spektren von Neutronen nach Myon-Absorption	
VII.2	Spektren von Protonen nach Myon-Absorption	
VII.3	Spektren von Deuteronen nach Myon-Absorption	
VIII	<u>Zusammenfassung</u>	

Anhänge

A.1	Definitionen, Konventionen und Gleichungen aus der relativistischen Quantenmechanik	105
A.2	Foldy-Wouthuysen-Transformation	109
A.3	Closure für den Streuoperator (4.23)	114
A.4	Entwicklung einer A-Teilchenwellenfunktion bei abgeschlossener Schale nach Teilchen 1 und 2 in einer drehimpulsgekoppelten Basis	121
A.5	Matrixelemente für 1- und 2-Teilchenoperatoren im A-Nukleonensystem	135
A.6	Vektorkopplung und reduzierte Matrixelemente	142
A.7	Berechnung von Integralen des Typs $\langle R_\gamma j_1(k) R_\delta R_\delta \rangle$ und $\langle j_1(k) R_\gamma R_\delta \rangle$ unter Verwendung von Oszillator-Wellenfunktionen	159
	Literaturverzeichnis	167

Kapitel I: Einleitung

Bei der Absorption negativer Myonen am Atomkern wird ein μ -Lepton ($m_{\mu}c^2 = 105 \text{ MeV}$; Spin = $1/2$; Ladung = $-e$) abgebremst und durch elektromagnetische Wechselwirkung atomar gebunden. Das eingefangene μ kaskadiert sodann in seinen energetisch günstigsten Zustand, den atomaren $1s$ -Zustand. In diesem Zustand ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Myons am Kernort besonders groß, und das μ wird an den Protonen des Kerns durch den Prozeß der schwachen Wechselwirkung



absorbiert.

Bei den dabei auftretenden Reaktionen



zerfällt der Anfangskern A in die Fragmente B und X, wobei $X = n, p, d, n+N$ etc. sein kann.

Die beobachteten Spektren und Übergangswahrscheinlichkeiten werden bei allen Prozessen durch den gleichen elementaren Prozeß der schwachen Wechselwirkung induziert und in einer für jeden Übergang und jeden Kern speziellen Weise von der Kernstruktur modifiziert. Somit reflektiert das Energiespektrum der emittierten Nukleonen, z.B. die Impulsverteilung gebundener Nukleonen im Kern. Dies wird modellhaft an einer qualitativen Betrachtung der Neutronenemission nach μ -Absorption deutlich: das Neutronenspektrum wird bestimmt durch die Übergangsamplitude T_{fi} . In jedem Modell unabhängiger Nukleonen ist dies von der Gestalt

$$\overline{T}_{fi} \propto \langle e^{i\vec{k}_n \cdot \vec{r}_1} e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}_2} | H_W(l, z) | \psi_p(\vec{r}_1) \phi_{\mu}(\vec{r}_2) \rangle \quad (1.3)$$

wobei H_w die schwache Wechselwirkung angibt, ψ_p die Protonenwellenfunktion, φ_μ die atomare μ -Wellenfunktion, $\exp(i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}_1)$ und $\exp(i\mathbf{k}_v \cdot \mathbf{r}_2)$ die ebenen Wellen der wegfliegenden Partikel angeben. Gehen wir von der Punktförmigkeit der Wechselwirkung aus und berücksichtigen wir, daß φ_μ über den Kernbereich nahezu konstant ist, so erhalten wir qualitativ:

$$T_{fi} \propto G \langle e^{i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r}} | \psi_p(\mathbf{r}) \rangle = G \psi_p(\mathbf{k}_p) \quad (1.4)$$

wobei $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_v$ ist,

d.h. die Wechselwirkung tritt als Stärkeparameter auf, und das Spektrum wird bestimmt durch die Impulsverteilung des absorbierenden Protons. Diese Überlegung macht klar, daß die μ -Absorption ein Instrument zum Test unseres Bildes der Kernstruktur darstellt.

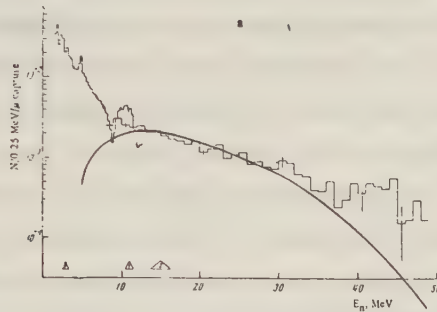
Speziell drei experimentelle Ergebnisse machen die μ -Absorption für die Mittelenegiekerphysik interessant:

1. Die große Wahrscheinlichkeit für die Emission von Neutronen hoher Energie, die mit dem Schalenmodellansatz allein nicht reproduziert werden kann (Figur 1) [Pik 71, Sch 73]
2. Mehrteilchenemission und Emission von geladenen Teilchen (Figur 2) [Sob 68]
3. Einen weiteren Hinweis auf die Modifikation dieses einfachen Bildes liefern die Kern- γ -Spektren [Bac 70]. Die nach μ -Absorption beobachteten γ -Spektren stammen von Kernen der Nukleonenzahl $A, (A-1), (A-2), (A-3), (A-4) \dots$.

Bei μ -Absorption an ^{59}Co trägt z.B. der γ -Übergang $1/2^- \rightarrow 3/2^-$ im $(A-4)$ -Kern ^{55}Fe noch mit 1 % bei.

Um die durch μ -Absorption induzierten Reaktionen in den Griff zu bekommen, werden wir im folgenden immer vom Schalenmodell des Atomkerns ausgehen. Da das

Figur 1.1: Neutronenspektrum von ^{32}S [Woj 72/1]



Vergleich des Verlaufs des experimentellen Spektrums mit dem aus der einfachen Theorie Gleichung (1.4).

Figur 1.2: Spektrum geladener Teilchen aus ^{18}Si [Sob 68]

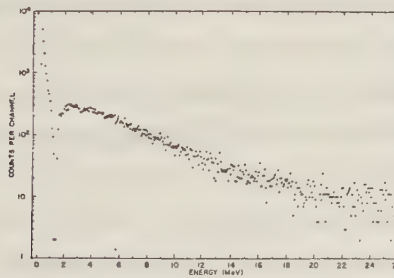


FIG. 3. Data after subtraction of muon-decay electron background and correction for escape of protons.

Totale Protonemissionsrate: 15% Protonen pro μ -Absorption.

Wesentlich: Es gibt schnelle Protonen (Energie über 15 MeV). Das Spektrum der schnellen Protonen fällt mit der Energie deutlich geringer ab als das der langsamen Protonen (Energie zwischen 4 und 10 MeV).

Schalenmodell jedoch ein Einteilchenmodell (IPM)⁺ (Independent Particle Model) darstellt, können die unter (1.2) aufgeführten Reaktionen mit Ausnahme der Neutronenemission nicht über die schwache Wechselwirkung allein, sondern nur über einen Mehrstufenprozeß unter Einbeziehung der starken Restwechselwirkung der Nukleonen ablaufen.

Wegen des hohen Energieübertrages auf das nukleonische System ist es naheliegend, für die Emission hochenergetischer Nukleonen die kurzreichweitigen Anteile der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung als relevant anzunehmen. Während aus Prozessen wie der Protonemission nach p -Absorption eine Modifikation des Streuoperators und damit der IPM-Wellenfunktionen gefordert werden muß, folgt aus dem Auftreten schneller Nukleonen, daß es sich um relativ kurzreichweitige Effekte der Kernstruktur handelt. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit entweder mit Hilfe des Jastrowschen Ansatzes der Korrelationsfunktionen (SRC) oder durch eine explizite Berücksichtigung des Ein-Pion-Austausches zwischen gebundenen Nukleonen. Da die oben abgeleiteten qualitativen Ergebnisse für die Gestalt der Übergangsamplitude T_{fi} unter anderem durch die Impulsabhängigkeit der elementaren Wechselwirkung noch modifiziert werden können, ist es zur Untersuchung von Kernstruktureffekten wichtig, die Impulsabhängigkeit der Struktur der schwachen Wechselwirkung H_w zu kennen. Dazu wird eine

⁺) im folgenden benutzen wir durchgehend die Bezeichnung

IPM = Independent Particle Model

Analyse des Wechselwirkungsoperators durchgeführt.

Ziel der Arbeit ist es, die angegebenen Reaktionen auf der Basis des Schalenmodells zu beschreiben

- a) unter Verwendung einer galileiinvarianten Form der elementaren Wechselwirkung H_W und
- b) unter Berücksichtigung der kurzreichweitigen Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zwischen gebundenen Nukleonen.

Diese Untersuchungen werden durchgeführt unter vereinfachenden Annahmen über die Wellenfunktionen der auslaufenden Nukleonen (PWBA bzw. DWBA in Eikonalnäherung)

Im Einzelnen gliedert sich die Arbeit folgendermaßen:

Am Anfang steht eine Betrachtung der speziellen Kinematik und Energieverhältnisse. Dem folgt eine Untersuchung der elementaren Wechselwirkung im nichtrelativistischen Grenzfall und die Herleitung einer galileiinvarianten Form für den Wechselwirkungsoperator.

Unter Berücksichtigung der Kernstruktur ergibt sich hieraus der effektive Streuoperator für verschiedene μ -Absorptionsprozesse. Mit diesem effektiven Streuoperator können die Matrixelemente für Neutron-, Proton-, und Deuteronemission berechnet werden.

Nach einer Übersicht über experimentelle Daten und gegenwärtigen Stand der theoretischen Analyse werden Ergebnisse aus eigenen Rechnungen aufgeführt.

Kapitel II: Kinematik und Energieverhältnisse

II.1 Übergangswahrscheinlichkeit und Klassifizierung der Reaktionen

Der allgemeine Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit ist [Rod 67]

$$dP_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\overline{T}_{fi}|^2 \lambda \rho_f(E) \quad (2.1)$$

Dabei ist T_{fi} die Übergangsamplitude zwischen Anfangs- und Endzustand der Reaktion und H_w der Operator der elementaren schwachen Wechselwirkung.

$$\overline{T}_{fi} = \langle \psi_f | H_w | \psi_i \rangle \quad (2.2)$$

Wenn man die Übergangsamplitude in einem IPM betrachtet, das durch die Modell-Wellenfunktionen ϕ_I bzw. ϕ_F beschrieben ist, lassen sich die exakten Zustände ψ_i und ψ_f durch eine unitäre Transformation aus den IPM-Zuständen erzeugen

$$\psi = U \phi \quad (2.3)$$

so daß

$$\overline{T}_{fi} = \langle \phi_f | T_{eff} | \phi_i \rangle$$

mit

$$T_{eff} = U^{-1} H_w U = \sum_i H_w^{(1)}(i) + \sum_{i < j} H_{int}^{(2)}(i, j) + \dots \quad (2.4)$$

(2.4) stellt die Clusterentwicklung von (2.2) dar. Eine solche Entwicklung ist immer dann sinnvoll, wenn die Reihe (2.4) schnell konvergiert. Dies ist der Fall, wenn die die Matrix U bestimmenden Kräfte kurzreichweitig sind. Man kann bei der Anwendung der Entwicklung dann davon ausgehen,

daß Reaktionen, die über einen effektiven n-Teilchenoperator in niedrigster Ordnung ablaufen, durch den (n+1)-Teilchenoperator nur noch modifiziert werden. Diese Annahme wird durch eine großen Zahl von Rechnungen gestützt.

Für die μ -induzierten Reaktionen bedeutet dies, daß $\mu + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{16}\text{N}^* + \nu$ und $\mu + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + n + \nu$ im wesentlichen als direkte Reaktionen über H_W ablaufen und über den Zweiteilchenoperator $H_{int}^{(2)}(1,2)$ nur noch modifiziert werden.

Die Reaktion $\mu + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{C} + p + \nu$ dagegen läuft in niedrigster Ordnung über $H_{int}^{(2)}(1,2)$

Da die Transformation U aus Gl. (2.3) auf Nukleonenzustände wirkt, muß sie Eigenschaften oder Wechselwirkungen der Nukleonen beinhalten und von der Einteilchenbasis selbst abhängen. Hierauf gehen wir im einzelnen in Kap. IV ein. Wir bemerken hier lediglich, daß die exakte Berechnung von T_{eff} ein ungelöstes Problem darstellt.

Die Dichte der Endzustände $d\rho_f(E)$ ist gegeben durch

$$d\rho_f(E) = \frac{(2\pi)^3}{V} \left(\frac{V}{(2\pi)^3} \right)^N \left(\prod_{r=1}^N d^3q_r \right) \delta^{(3)}(q_f - q_i) \delta(E_f - E_i) \quad (2.5)$$

V ist das Volumen, N gibt die Zahl der freien Projektile im Endkanal an, E_f, q_f sind Gesamtenergie und Gesamtimpuls des Endzustandes, E_i, q_i Gesamtenergie und Gesamtimpuls des Anfangszustandes (in der angegebenen Darstellung hat q die Dimension 1/Länge). Die Formel (2.5) für den Phasenraum erlaubt eine Einteilung der Reaktionen nach der Zahl der Teilchen im Endzustand. Während sowohl $\mu + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{16}\text{N} + \nu$ als auch $\mu + {}^{16}\text{O} \rightarrow {}^{15}\text{N} + n + \nu$ durch $H_W^{(1)}$ induziert werden, besteht der Endzustandsphasenraum im ersten Fall aus den Teilchen A^* und ν , bei Neutronenemission dagegen aus den Reaktionsprodukten B, n und ν .

Ebenfalls in einen Dreiteilchen-Phasenraum führt die Emission von Proton oder Deuteron. Im Gegensatz zur Neutronemission laufen diese Reaktionen in niedrigster Ordnung über $H_{int}(1,2)$ ab. Falls der Endzustand aus $B+n+N+\nu$ besteht, erweitert sich der Endzustand zu einem 4-Teilchenkontinuum, das über $H_{int}(1,2)$ erreicht werden kann.

Reaktionen, die in niedrigster Ordnung über $H_{int}^{(3)}(1,2,3)$ ablaufen, sind wegen der Schwierigkeit der Berechnung der Wechselwirkung nur schwer in den Griff zu bekommen. Darüberhinaus bildet bei diesen Reaktionen der Endzustandsphasenraum ein höheres Kontinuum, welches die mikroskopische Information über das nukleonische System zugunsten statistischer Eigenschaften verdrängt.

II.2 Phasenraumbetrachtungen

Allgemeine Voraussetzungen

Der Anfangszustand der Reaktion ist in allen betrachteten Fällen gekennzeichnet durch einen Kern A mit Schalenabschluß im Grundzustand 0^+ und ein μ im atomaren Bindungszustand $1s\frac{1}{2}$. Der Endzustand ist durch die Fragmente B, X und ν charakterisiert, wobei X ein oder zwei Nukleonen darstellt.

Übergangswahrscheinlichkeit

(In den folgenden Ableitungen gilt: Wirkung wird in Einheiten von $\hbar$ gemessen, Geschwindigkeit in Einheiten von c.)
Nach Gleichung (2.1) können wir für die Emission eines aus N

freien Teilchen bestehenden Fragmentes X bei der Reaktion
 $\mu + A \rightarrow B + X + \nu$ schreiben:[†]

$$dP_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \frac{1}{(2\pi)^3 (2\pi)} \omega d^3 q_B d^3 q_\nu d^3 q_X \times \quad (2.6)$$

$$\times \delta^{(3)}(q_B + q_X + q_\nu) \delta(\sqrt{M_B^2 + q_B^2} + E_X + q_\nu - (M_A + m_\mu))$$

Die hier angegebene (9)-fach differentielle Übergangsrate wird durch die Gesamtheit der meßbaren Größen wie Impulse, Energien und Spins bestimmt. Sie ist jedoch wie der in den Deltafunktionen sich ausdrückende Energie-Impulssatz zeigt, 4-fach überbestimmt. Danach wird die höchstmögliche Information durch die (5)-fach differentielle Übergangsrate gegeben. Ein Experiment, bei dem diese Information ohne Diskriminierung der Spinrichtungen extrahiert wird, nennt man vollständig.

Wir leiten aus (2.6) den Ausdruck für das vollständige Experiment ab. Dazu macht man zwei Näherungen, deren erste sich auf den Phasenraum bezieht, während die zweite das Matrixelement betrifft.

[†] Wir leiten dP_{fi} für den Fall ab, daß x ein freies Teilchen ist, (also $x = n, p, d$) Für $X = n+N$ oder $X=n+N+N'$ verläuft die angeführte Diskussion analog. Für Zweinukleonenemission geben wir das Ergebnis in (2.12) an.

1. Vernachlässigung der kinetischen Energie des Rückstoßkerns B.

$$\text{Also: } \sqrt{M_B^2 + q_B^2} \approx M_B + q_B^2 / 2M_B \approx M_B$$

Diese Näherung ist gerechtfertigt, da der Recoilimpuls des Restkerns B von der Größenordnung des Impulses der Fragmente X ist, und damit die kinetische Energie des Restkerns B wegen des Massenverhältnisses $M_X/M_B \ll 1$ gegenüber der kinetischen Energie des emittierten Systems nahezu verschwindet.

2. Stoßapproximation für den Restkern B

Danach nimmt der Restkern B an der Reaktion nur als Zuschauer teil. Folglich ist sein Impuls von der Reaktion nicht beeinflusst. In unserem Fall ergibt sich daraus mit $q_A = 0$

$$0 = q_A = q_X^{(0)} + q_B$$

wobei $q_X^{(0)}$ der Impuls des Systems X vor der Wechselwirkung mit dem Kern ist.

Mit den Bezeichnungen $\Delta M = (M_B + M_X - M_A)$

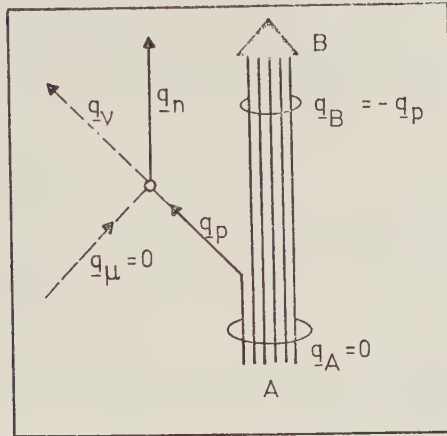
$$\text{und } T = E - M$$

erhält man:

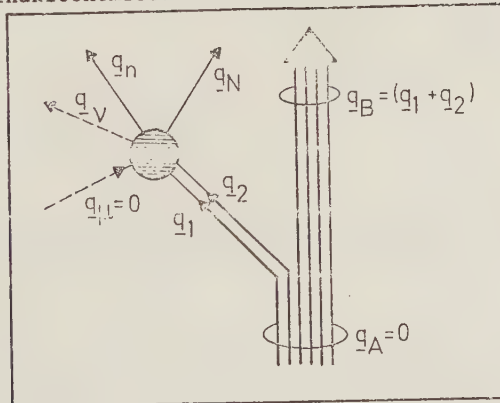
$$dP_i = \frac{|T_i|^2}{(2\pi)^{2+3}} d^3q_B d^3q_\nu d^3q_X \times \\ \times \delta^{(3)}(q_B + q_X + q_\nu) \delta(T_X + E_\nu - (m_\nu - \Delta M)) \quad (2.7)$$

Figur 2.1: Stoßapproximation bei μ -Absorption

(i) Neutronenemission



(ii) Zweinukleonemission



Die Skizzen des Reaktionsmechanismus zeigen die durch Impulssatz und Stoßapproximation gegebene kinematische Situation bei μ -Absorption.

Der Kernrecoil wird durch die Impulse der emittierten Teilchen bestimmt, die nach der schwachen Wechselwirkung mit dem Myon mit dem Kern keine Energie mehr austauschen.

Man integriert zuerst über q_B , was die Impuls-Deltafunktion zum Verschwinden bringt:

$$dP_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{(2\pi)^{1+3}} d^3q_\nu d^3q_x \delta(T_x + E_\nu - (m_\mu - \Delta M)) \quad (2.8)$$

$$\text{mit } -q_B = q_x + q_\nu$$

Die Relation

$$q dq = E dE$$

führt auf

$$d^3q = q^2 dq d\Omega_q = qE d\Omega_q$$

Dies ermöglicht die Integration über E_ν , was die Energie-Deltafunktion zum Verschwinden bringt.

$$dP_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{(2\pi)^{1+3}} q_x E_x q_\nu E_\nu dE_x d\Omega_x d\Omega_\nu \quad (2.9)$$

$$\text{mit } -q_B = q_x + q_\nu$$

$$\text{und } E_\nu = (m_\mu - \Delta M) - T_x$$

Solange keine äußere Orientierung (etwa durch eine ausgezeichnete Spinrichtung) festgelegt ist, kann T_{f1} nur von den Beträgen der Impulse der auslaufenden Teilchen und ihren Richtungen zueinander abhängen. Dies ist bei der spingemittelten Übergangswahrscheinlichkeit $\frac{1}{|T_{f1}|^2}$ der Fall.

Durch Übergang auf Relativwinkel erhält man bei Neutronen-emission

$$\frac{d^3 \overline{P}_{fi}^{spins}}{dE_n d\Omega_{nv}} = \frac{4\pi}{(2\pi)^5} \frac{V^2}{(\hbar c)^5} \overline{|T_{fi}|^2}^{spins} q_n E_n q_\nu E_\nu \quad (2.10)$$

$$\text{mit } -q_B = q_n + q_\nu$$

$$\text{und } E_\nu = (m_\nu^2 - \Delta M^2)^{1/2} - T_n$$

(hier wurden $\hbar, c$ und V wieder eingesetzt. V fällt wegen der Normierung $1/\sqrt{V}$ der ebenen Wellen für Neutrino und das Neutron wieder weg).

Gleichung (2.10) gibt das bei Neutronemission vollständige Experiment an. Da man jedoch weder das wegfliegende Neutrino noch den Rückstoßkern im Experiment beobachten kann, wird die in (2.10) gegebene Information nicht ausgeschöpft. Man integriert bei festgehaltenen Neutronenimpuls über die Richtungen der Neutrinoemission. Dies führt auf:

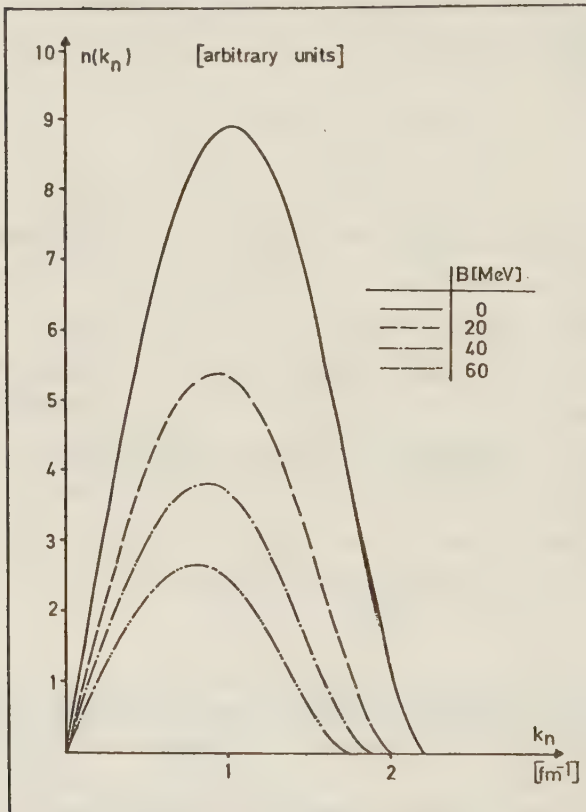
$$\frac{d \overline{P}_{fi}^{spins}}{dE_n} = \frac{2}{(2\pi)^4} \frac{c}{(\hbar c)^5} \int \overline{|T_{fi}|^2}^{spins} q_n E_n q_\nu E_\nu d\Omega_{nv} \quad (2.11)$$

Der Phasenraum der Reaktion wird bis auf Konstanten durch

$$n(E_n) \propto q_n E_n q_\nu E_\nu = q_n E_n E_\nu^2 / c \quad \text{bestimmt.}$$

Wegen der kinematischen Abhängigkeit der Neutrinoenergie E_ν von T_n (siehe (2.10)) schrumpft der Phasenraum bei hohen Energien T_n quadratisch in E_ν . Während die Anwesenheit eines dritten Teilchens für eine Begrenzung des Phasenraums sorgt, erzeugt seine Masselosigkeit einen besonders starken Abfall bei hohen Emissionsenergien.

Figur 2.2: Phasenraum für verschiedene Anregungsenergien B bei Neutronenemission.



Analog zur Formel für die Ein-Nukleonenemission läßt sich der Ausdruck (2.6) für Zwei-Teilchenemission auswerten.

Nach Spinmittelung erhält man:

$$\frac{d^6 P_i}{dE_n dE_N d\Omega_n d\Omega_N} = \frac{4\pi}{(2\pi)^8} \frac{V^3}{(k_L)^7} |T_{fi}|^2 q_n E_n q_N E_N q_\nu E_\nu \quad (2.12)$$

$$\text{mit } -g_B = g_n + g_N + g_\nu$$

$$\text{und } E_\nu = (m_p - \Delta M) - (T_n + T_N)$$

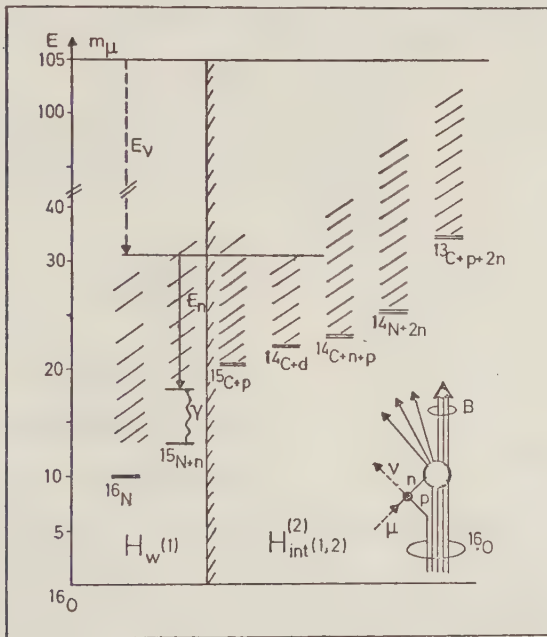
II.3 Energetische Verhältnisse

Die folgenden Ausführungen dienen lediglich dazu, die vorausgegangenen, allgemeinen Ausführungen zu illustrieren. Sie sollen die bei der μ -Absorption spezielle, für die Kernstruktur interessante kinematische Situation vor Augen führen.

II.3.1 Energien für ^{16}O

Nachdem durch Energie- und Impulssatz Phasenraum und Kinematik festgelegt sind, sollen die Verhältnisse speziell am System ($\mu^{16}\text{O}$) erläutert werden.

Figur 2.3: Zerfallskanäle bei μ -Absorption an ^{16}O



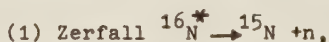
Die Skizze verdeutlicht, daß das System ($\mu^{16}\text{O}$) einen Zustand darstellt, der hoch im Kontinuum liegt.

Der Energieübertrag $\omega = m_{\mu} c^2 - E_{\nu}$ auf das Nukeonensystem gibt an, welche Kanäle für die Reaktion geöffnet sind.

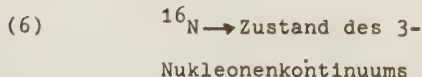
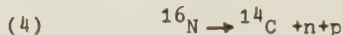
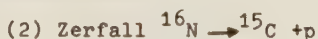
- (1) $\omega = 10$ MeV ist die Schwelle für Absorption.
- (11) $\omega = 13$ MeV ist die Schwelle für den Einteilchenübergang.
- (111) $\omega = 23$ MeV ist die Schwelle für Zweiteilchenprozesse.
- (1v) $\omega = 32$ MeV ist die Schwelle für Dreinukleonenaufbruch.

Wir erläutern die energetischen Verhältnisse an dem Beispiel eines Absorptionsprozesses, bei dem das Neutrino den Kern mit einer Energie von 20 MeV verläßt.

Es verbleiben dann dem nukleonischen Restsystem 85 MeV; dem ^{16}N -System also eine Anregungsenergie von 75 MeV. Diese Energie ermöglicht:



wobei das Neutron bereits bei der Wechselwirkung H_{int} (1) die Energie gewonnen haben kann.



Im Rahmen eines IPM (Independent Particle Model) mit Einteilchenwechselwirkungsoperator wird außer ^{16}N im Kontinuum und $^{15}\text{N} + n$ kein Endzustand erreicht. Die Prozesse (2) bis (5) laufen in niedrigster Ordnung über H_{int} (1,2) ab.

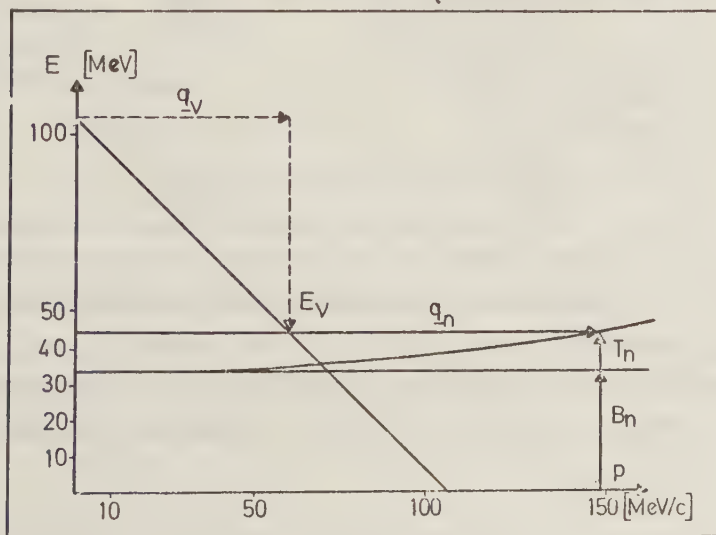
Man liest aus der Skizze ab, daß alle Reaktionen, die wir beschreiben wollen, durchaus auf Nukleonenenergien von 70-90 MeV führen können.

II.3.2 Energie-Impulsbilanz für $^{16}\text{O}(\nu; n, \nu) ^{15}\text{N}$

Während bei der μ -Absorption am freien Proton $\mu + p \rightarrow n + \nu$ das Neutron wegen Energie und Impulserhaltung nur eine Energie von 5 MeV haben kann, sind nach den Ausführungen von 3.1 beim gleichen Prozeß am gebundenen Proton Nukleonenergien bis nahezu 100 MeV möglich, da hier der Restkern als dritter Partner der Reaktion Impuls aufnehmen kann.

Dies ist nur möglich, wenn das schwach wechselwirkende Neutron bereits einen relativ hohen Impuls hat. Da die im Kern gebundenen Nukleonen nicht der Energie-Impulsgleichung der freien Teilchen $T = p^2/2M$ gehorchen, sondern bei fester Bindungsenergie aufgrund der Unschärferelation bei räumlicher Fixierung eine Impulsunschärfe aufweisen, sind diese Voraussetzungen genau gegeben. Energie und Impulssatz können also deshalb erfüllt werden, weil bei μ -Absorption am Kern 3 Fragmente im Endzustand vorliegen.

Figur 2.4: Energie-Impulsbilanz bei μ -Absorption am Kern.



Aufgrund der Stoßapproximation gilt im Kern wie im elementaren Prozeß die Beziehung $q_n + q_v = q_p$, jedoch ist hier

(1) $q_p \neq 0$ mit der Amplitude $\Psi(q_p)$

(ii) kein on-shell-Zusammenhang zwischen E_p und q_p .

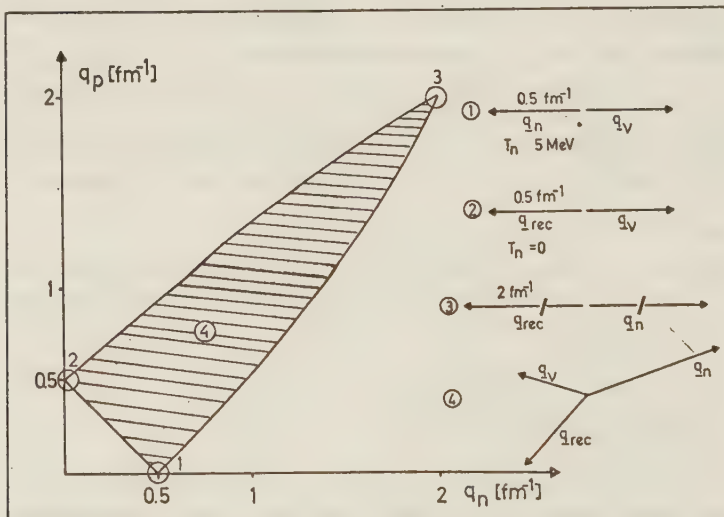
Bei vorgegebenem q_n kann q_p nur einen begrenzten Wertebereich durchlaufen. Dieser Zusammenhang wird durch die Ungleichung

$$|q_n - q_v| \leq q_p \leq |q_n + q_v|$$

mit $q_v = (m_p c^2 - \Delta M c^2 - T_n)/c$ (2.13)

ausgedrückt.

Figur 2.5: "Impulsfenster" q_p bei gegebenem Neutronenimpuls



Die Dreiecksungleichung für die Nukleonenimpulse gibt somit

an, in welchem Bereich bei gegebener Neutronenemissionsenergie die Impulsverteilung $\Psi(q_p)$ des Protons abgetastet wird.

Dabei stellt man fest, daß bei μ -Absorption die Impulsamplitude des Protons bis zu circa 400 MeV/c zur Reaktion beiträgt.

Kapitel III:

Nichtrelativistischer Ansatz für die elementare Wechselwirkung

In diesem Kapitel geben wir die Ableitung einer galileiinvarianten nichtrelativistischen Form für den Operator der schwachen Wechselwirkung im Fall der μ -Absorption. Die Angabe eines nichtrelativistischen Operators ist notwendig, da der Atomkern durch einen nichtrelativistischen Hamiltonoperator beschrieben wird, in dem die kinetische Energie durch die Dispersionsrelation $T = p^2/2M$ mit dem Impuls verknüpft ist, während relativistisch gilt: $T = \sqrt{p^2 + M^2} - M$

Der Operator H_W der schwachen Wechselwirkung dagegen ist durch einen lorentzinvarianten Strom-Strom-Ansatz gegeben [Blin 73, Fujii 59]:

$$H_W = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu J_\mu \quad (3.1)$$

Dabei ist J^μ der totale schwache Strom der Leptonen und der Baryonen.

Die relativistische Form der Wechselwirkung wird mittels einer Foldy-Wouthuysen-Transformation in erster Ordnung galileiinvariant auf eine nichtrelativistische Form gebracht.

III.1 Die relativistische Form der Wechselwirkung

(zu den Definitionen der γ -Matrizen, Spinoren etc. siehe Anhang 1 oder [Bjo 66]).

Beim schwachen Prozeß der μ -Absorption reduziert sich die Gleichung (1.1) auf die Verkopplung des schwachen Leptonenstroms mit dem schwachen Nukleonenstrom.

Man schreibt:

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} \ell^\mu N_\mu \quad (3.2)$$

$$G = (8.7784 \pm 0.0019) \times 10^{-5} \text{ MeV Fm}^3 \approx \frac{10^{-5}}{M^2}$$

dabei ist ℓ^μ der leptonische,

N_μ der nukleonische Strom

und M die Nukleonenmasse.

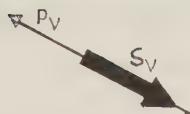
Der Ansatz (1.2) bedeutet eine punktförmige Wechselwirkung, die man sich graphisch wie folgt veranschaulicht:



Der leptonische Strom ℓ_α hat die für die schwache Wechselwirkung charakteristische V-A-Struktur: [Blin 73]

$$\ell_\alpha = \bar{\nu} \gamma_\alpha (1 - \gamma^5) \mu \quad (3.3)$$

der Operator $(1 - \gamma^5)$ auf das Neutrino angewandt bewirkt, daß dieses als Teilchen negativer Helizität davonfliegt:



Der Spin des Neutrinos steht seiner Flugrichtung entgegengesetzt. Der nukleonische Strom N^α weist wegen der Beiträge der die Nukleonen umgebenden Mesonenwolke keine reine V-A-Struktur auf [Blin 73].

$$N^\alpha = \bar{n} \{ f_V \gamma^\alpha + f_A \gamma^\alpha \gamma^5 + i f_W \gamma^\alpha \gamma^5 \gamma_5 - f_P q^\alpha \gamma^5 \} P \quad (3.4)$$

(Hierbei sind ν, μ, n, p die Spinoren der zugehörigen Teilchen).

Es gilt: $f_V=1$; $f_A = 1.23$; $f_W = -\frac{\kappa_p - \kappa_n}{2M}$; $f_P = \frac{6.7}{m_\mu} f_A$

mit $K_n=1.91$; $K_p=1.79$ [Blin 73]

III.2 Nichtrelativistische Reduktion der schwachen Wechselwirkung

Der in (3.4) gegebene nukleonische Strom ist lorentzinvariant und somit vollrelativistisch. Um mit den nichtrelativistischen Kernwellenfunktionen Matricelemente zu bilden, braucht man eine nichtrelativistische Form von H_W . Diese erreicht man in einer Potenzreihenentwicklung nach dem Nukleonenimpuls in einer Foldy-Wouthuysen-Transformation. Der Grundgedanke und

das Schema der Foldy-Wouthuysen-Transformation und ihre Anwendung auf (3.4) wird im Anhang 2 gegeben. Als Ergebnis der Transformation bekommt man:

$$\begin{aligned} H'_W &= H_W^{(0)} + H_W^{(1)} \\ H_W^{(0)} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \ell_0 [f_V + f_A \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_Z + i f_W (\vec{q} \times \vec{\sigma}_N) \cdot \vec{\sigma}_Z] \\ H_W^{(1)} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \ell_0 \frac{1}{2M} \left(\{ \vec{\sigma}_N \vec{p}, (f_A + f_V \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_Z) \} \right. \\ &\quad \left. - [\vec{\sigma}_N \vec{p}, (f_W (\vec{q} - q_0 \vec{\sigma}_Z) \cdot \vec{\sigma}_N + f_P (q_0 - \vec{q} \vec{\sigma}_Z))] \right) \end{aligned} \quad (A2.15)$$

Der hier bestimmte Operator H_W ist in seinen impulsabhängigen Termen dem Nukleonenimpuls p proportional. Wenn wir für p den Protonenimpuls einsetzen, ergeben sich bei Neutronenemission aus der Energie-Impuls-Beziehung (II.3.1) Beiträge der Größenordnung

$$\frac{|\vec{p}|}{M} \leq 0.4 \quad (3.5)$$

Dies bedeutet, daß für die Emission hochenergetischer Neutronen die Entwicklung nach p/M der Foldy-Wouthuysen-Transformation keine gute Konvergenz liefert.

Als zweites bemerken wir, daß die Foldy-Wouthuysen-Transformation des Nukleonenstromes unsymmetrisch ist, insofern als die relativistische Impulsabhängigkeit des Neutronenspinors des Endzustandes vollkommen unterdrückt wird. Darüberhinaus ist die Transformation mehrdeutig, denn man kann genauso gut wie nach dem Anfangszustand nach dem Endzustand transformieren. Unabhängig von dieser Mehrdeutigkeit ist die so erhaltene

nichtrelativistische Wechselwirkung nicht galileiinvariant.
Wir fassen die Kritik an der nichtrelativistischen reduzierten Wechselwirkung zusammen.

- 1) Schlechte Konvergenz
- 2) Unsymmetrisch in den Nukleonenimpulsen
- 3) Mehrdeutig
- 4) Nicht-Galileiinvariant

III.3 Galilei-invariante Wechselwirkung

Die Schwächen von H_W lassen sich nicht durch eine Drehung im Spinorraum nach Art der Foldy-Wouthuysen Transformation beheben. Den Ausweg bietet eine kombinierte Transformation.

- (i) Translation im Impulsraum im Ruhesystem des Endzustandes;
- (ii) Foldy-Wouthuysen Transformation des gemäß (i) transformierten Nukleonensystems.

Wie unten gezeigt wird, garantiert dies, daß sowohl Anfangs- wie Endzustandsspinor nach der Transformation kein Antiteilchenbeiträge mehr enthalten. Außerdem führt diese Transformation auf eine galileiinvariante Form der Wechselwirkung.

(1) Durchführung der Translation

$$u_f \sim \begin{pmatrix} \xi_f \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_f}{2M} \xi_f \end{pmatrix} \longrightarrow u'_f \sim \begin{pmatrix} \xi_f \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_f - \vec{p}_f)}{2M} \xi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$u_i \sim \begin{pmatrix} \xi_i \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{2M} \xi_i \end{pmatrix} \longrightarrow u'_i \sim \begin{pmatrix} \xi_i \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_f)}{2M} \xi_i \end{pmatrix}$$

$$H_W = \beta M + \gamma^5 \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i \longrightarrow H'_W = \beta M + \gamma^5 \vec{\sigma} \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_f)$$

(11) Foldy-Wouthuysen Transformation

Die Foldy-Wouthuysen Transformation muß nun nicht mehr bezüglich $\vec{p}$, sondern bezüglich des Impulses $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}$; vorgenommen werden. Die Matrix S lautet daher

$$S = \frac{\gamma^0}{2M} (\vec{\sigma}_N \cdot (\vec{p}_i - \vec{p}_f) \gamma^5 + H_W^u) \quad (3.7)$$

Dies bedeutet, daß in der transformierten Wechselwirkung (2.12) an Stelle von $\vec{p}$ der Impuls $\vec{p}_v$ auftaucht.

Damit bekommt man für H_W den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} H_W' &= H_W^{(0)} + H_W^{(1)} \\ H_W^{(0)} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \epsilon_0 [f_V + f_A \vec{\sigma}_N \cdot \vec{\epsilon}_x + i f_W (\vec{q} \times \vec{\sigma}_N) \cdot \vec{\epsilon}_x] \\ H_W^{(1)} &= \frac{G}{\sqrt{2}} \epsilon_0 \frac{1}{2M} \left(\{ \vec{\sigma}_N \cdot \vec{p}_v, (f_A + \vec{\sigma}_N \cdot \vec{\epsilon}_x) \} - \right. \\ &\quad \left. - [\vec{\sigma}_N \cdot \vec{p}_v, (f_W (\vec{q} - q_0 \vec{\epsilon}_x) \cdot \vec{\sigma}_N + f_P (q_0 - \vec{q} \cdot \vec{\epsilon}_x))] \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

III.4 Schwache Wechselwirkung für μ -Absorptionsprozesse

Nach den bisherigen Überlegungen läßt sich ein allein durch die kinematische Situation am Vertex bestimmter Ausdruck für die schwache Wechselwirkung bei μ -Absorption angeben.

Als geschwindigkeitsabhängige Größen gehen Energie- und Impulsübertrag am Vertex ($q_0, \vec{q}$) ein. Wegen

$$\vec{p}_v = E_v \hat{v} \quad (3.9)$$

gilt:

$$(q_0, \mathbf{q}) = ((m_p - \Delta M - E_\nu), -E_\nu \hat{\mathbf{v}}) \quad (3.10)$$

Damit hat die hier abgeleitete nichtrelativistische Form die in (3.1) aufgeführten Fehler nicht. Sie liefert

- 1) gute Konvergenz, da (wegen $p \approx 100 \text{ MeV}/c$)
- 2) Symmetrie bezüglich p und n ;
- 3) Eindeutigkeit durch die Forderung nach Galileiinvarianz

III.4.1 Untersuchung von H_W für Spezialfälle

Aus Gleichung (4.2) und (3.4) geht hervor, daß gilt:

$$H_W^{(1)} \sim \frac{E_\nu}{M} \quad (3.11)$$

Das bedeutet wegen $0 \leq E_\nu \leq \omega$, daß die geschwindigkeitsabhängigen Terme immer weniger als 10 % der Gesamtwechselwirkung ausmachen.

$$\frac{\langle H_W^{(1)} \rangle}{\langle H_W^{(0)} \rangle} \leq \frac{m_p}{M} \approx 0.1 \quad (3.12)$$

Für hohe Neutronenenergien gilt $E_\nu \rightarrow 0$ und damit bekommt man:

$$H_W \approx \frac{G}{\sqrt{2}} b [f_V + f_A \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_p] \quad (3.13)$$

Die zugehörige kinematische Situation ist in Figur 2.4 verdeutlicht.

Da bei großen Neutronenenergien der Impulsübertrag klein ist, erhält man nur schwache Brechung der V-A-Struktur des Nukleonenstroms. Wir erwarten folglich für hochenergetische Neutronen nur kleine "relativistische Beiträge".

Für kleine Neutronenenergien gilt $E_v \rightarrow m_p$.

In diesem Fall trägt H_W bis zu 10 % zur Wechselwirkung bei, da der Impulsübertrag zwischen den Nukleonen nicht vernachlässigbar ist.

Wir fassen zusammen:

- 1) Impulsabhängige Korrekturen des Wechselwirkungsoperators sind kleiner als 10 %;
- 2) bei hohen Impulsen im Nukleonenstrom ist es unbedenklich, Impulskorrekturen zu vernachlässigen;
- 3) bei niedrigen Impulsen im Nukleonensystem sind die geschwindigkeitsabhängigen Beiträge in P/M nicht zu vernachlässigen;
- 4) für hochenergetische Neutronen stellt man darüberhinaus fest, daß die Polarisation des emittierten Neutrons im wesentlichen allein durch $f_A \vec{\sigma}_N \vec{k}$ bestimmt wird, da die $\vec{p}_v \vec{\sigma}_N$ Terme gegen Null gehen.

Kapitel IV: Wechselwirkungsoperator für μ -Einfang

IV.1 Vorbemerkung

Nach den Ausführungen von Kapitel II werden bei der μ -Absorption Nukleonenimpulse bis zu circa 400 MeV/c frei. Dieser Impuls entspricht Nukleon-Nukleon-Abständen von ungefähr 0.5 Fm.

Um Nukleon-Emission bis zu Impulsen von 400 MeV/c zu beschreiben, muß also die Kernwellenfunktion bis zu Abständen von 0.5 Fm exakt angegeben werden. Eine Lösung des A-Nukleonensystems mit Einbeziehung der mesonischen Freiheitsgrade erfüllt gerade diese Forderung. Da jedoch eine exakte Lösung des A-Nukleonenproblems mit 2-Teilchenwechselwirkung bereits nicht möglich ist, führt man im Schalenmodell des Atomkerns halbphänomenologisch ein mittleres Einteilchenpotential ein. Dieses Schalenmodell beschreibt die Niederenergieeigenschaften des Kerns (wie Bindungsenergien) sehr gut. Da sich in diesem Modell die Nukleonen in einem gemeinsamen Einteilchenpotential bewegen, sind keine Zweiteilchenstöße möglich. Andererseits ist bekannt, daß die Nukleonen einen Radius von etwa 0.5 Fm haben. Dies bedeutet, daß man bei μ -Absorptionsprozessen gerade in den Energiebereich hineinflüßt, für den das Schalenmodell nicht mehr ausreicht.

Hieraus folgt, daß man zur Beschreibung der μ -Absorptionsphänomene die Schalenmodellwellenfunktion des Kerns im Sinne der Gleichung (2.3) zu modifizieren hat.

Äquivalent mit dieser Prozedur ist es, die Modifikation

der Kernwellenfunktion in operativer Weise dem Streuoperator zuzuschlagen. Hierdurch wird aus dem Streuoperator $H_{\text{int}}(1)=H_W(1)$ der elementaren Wechselwirkung ein effektiver Mehrnukleonenstreuoperator T_{eff} (siehe Gl. 2.4)). Die Modifikation des Streuoperators läßt sich - wie aus den bisherigen Ausführungen hervorgeht - auf zwei Arten realisieren.

1. Man modifiziert die gegebene Schalenmodellwellenfunktion durch das Verbot kleiner Internukleonabstände und schlägt diese phänomenologische Modifikation dem Streuoperator zu. Dies ist die Methode der SRC.

2. Man berücksichtigt die im Schalenmodell nicht enthaltenen Zweinukleonenstöße explizit in einem mikroskopischen Bild durch π -Austausch. Dieses Vorgehen ermöglicht im Gegensatz zu Methode 1. auch die Berücksichtigung dynamischer Effekte.

Welchen der beiden aufgezeigten Wege man beschreitet, hängt vom zu beschreibenden Prozeß ab. Dies soll zuerst untersucht werden. Hierzu stellen wir die Neutron- und die Protonemission nach μ -Absorption gegenüber.

Im Falle der Neutronemission hat man für das Neutron Impulse bis zu 400 MeV/c zur Verfügung. Den zur übertragenen Energie gehörenden on-shell-Impuls erhält das Neutron am wahrscheinlichsten durch einen Stoß mit einem anderen Nukleon, da seine eigene Wellenfunktion Impulse dieser Größe nur mit nahezu verschwindender Wahrscheinlichkeit enthält. Eine solche Ankopplung des Einteilchenprozesses an die Dichte des Restkerns ist auch deshalb plausibel, weil

der in dieser Reaktion erreichte Einlochzustand des Endkerns in der Natur relativ rein realisiert ist. Bei kleineren Impulsen sollte das Neutronenspektrum durch den Einteilchenübergang dominiert werden, wobei in diesem Bereich eine wesentliche Modifikation des Spektrums durch Distorsion und Absorption der auslaufenden Welle hervorgerufen wird.

Im Gegensatz zur Neutronenemission läuft die Protonenemission im IPM in niedrigster Ordnung über den effektiven Zweinukleonenoperator $H_{\text{int}}^{(2)}(1,2)$ (vgl. Gleichung (2.4)). Darüberhinaus ist bei der Protonenemission die Anregungsenergie des Endzustandes höher (siehe Fig. 2.3).

Im Schalenmodell ergibt sich der einfachste erreichbare Endzustand als Zweiloch-Einteilchen-Konfiguration, da in der Reaktion ein Proton das μ absorbiert und als Neutron im Kern verbleibt während ein zweites Proton den Kern verläßt. Die Struktur des Überganges hat zwei Konsequenzen:

1. Wegen der Bindungsverhältnisse des Endzustandes kann die auf das Proton übertragene Energie 70 MeV nicht überschreiten.

Damit sind die Protonenimpulse nicht so hoch wie bei der Neutronenemission, was darauf schließen läßt, daß die SRC in diesem Falle keine dominante Rolle spielen.

2. Der Reaktionsmechanismus läßt sich nicht allein durch einen Impulsaustausch beschreiben, sondern ist komplizierter Struktur. Damit gehen dynamische Effekte in die Reaktion ein. Aus diesem Grunde scheint es geraten, den π -Austausch explizit zu berücksichtigen.

Wir werden im folgenden

1. den SRC-Formalismus entwickeln, wie er zur Berechnung der Neutronenemission gebraucht wird,
2. den π -Austausch in einem auf hohe Emissionsimpulse zugeschnittenen Modell für Proton und Deuteronemission berechnen.

IV.2 SRC-Formalismus

(1) Der Jastrow-Ansatz [Jas 58]

Bei dem von Jastrow gewählten Ansatz für die korrelierte Wellenfunktion $|\psi_{\text{SRC}}\rangle$ setzt man anstelle der in (2.3) definierten Matrix U eine zustandsunabhängige Korrelationsfunktion $f(r_{ik})$ an.

Dies führt auf:

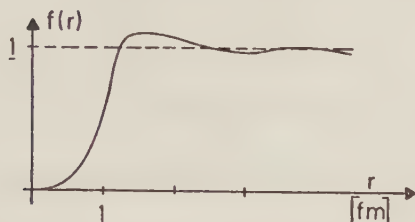
$$|\psi_{\text{SRC}}\rangle = \prod_{i < k} f(r_{ik}) |\phi_{\text{IPM}}\rangle \quad (4.1)$$

wobei $f(r_{ik})$ die Bedingung

$$f(r_{ik}) = \begin{cases} 0 & , r_{ik} \rightarrow 0 \\ 1 & , r_{ik} \rightarrow \infty \end{cases}$$

erfüllt.

Fig. 4.1 Korrelationsfunktion gegen Relativabstand

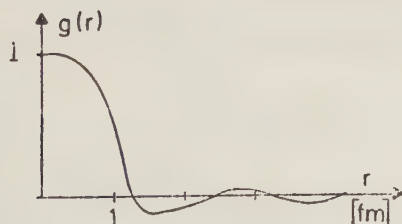


Die Einführung des Korrelationsfaktors bedeutet eine Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung der Nukleonen, insofern als die Amplitude für kleine Internukleonabstände gegen Null geht.

Darüberhinaus werden durch den Ansatz (4.1) die Nukleonen untereinander vernetzt, so daß die Wellenfunktion nicht mehr als Produktansatz geschrieben werden kann. Dieser Nachteil wird durch eine sogenannte Clusterentwicklung behoben:

$$f(r_{1k}) = 1 - g(r_{1k}) \quad (4.2)$$

Fig. 4.2



Die Entwicklung der korrelierten Wellenfunktion nach Ordnungen von $g(r_{ik})$ ist die Clusterentwicklung:

$$|\psi_{SRC}\rangle = |\phi_{IPM}\rangle + \sum_{i < k} g(r_{ik}) |\phi_{IPM}\rangle \quad (4.3)$$

(4.3) stellt eine Entwicklung nach der Vernetzungsordnung der Nukleonen dar: Fig. 4.

$$|SRC\rangle = \left| \begin{array}{|c|} \hline \text{|||||} \\ \hline \end{array} \right\rangle + \sum_{i < k} \left| \begin{array}{|c|} \hline \text{H |||||} \\ \hline \end{array} \right\rangle + \sum_{\substack{i < k \\ j < l}} \left| \begin{array}{|c|} \hline \text{H H |||||} \\ \hline \end{array} \right\rangle$$

(11) Korrelierter Operator

Nach den Ausführungen von IV.1 läßt sich die Modifikation der Wellenfunktion dem Streuoperator zuschlagen.

Nach Kapitel II.1 ist $T_{f1} = \langle F | H_w | I \rangle$.

Mit den Wellenfunktionen (4.1) bekommt man:

$$T_{fi} = \langle \phi_F | \prod_{\ell < m} f(r_{\ell m}) H_w \prod_{i < k} f(r_{ik}) | \phi_I \rangle \quad (4.4)$$

wobei ϕ_I und ϕ_F IPM-Funktionen sind.

Den Ausdruck (4.4) kann man in der Gestalt

$$T_{fi} = \langle \phi_F | T_{eff}(1, \dots, A) | \phi_I \rangle \quad (4.5)$$

schreiben, wobei der Operator $T_{eff}(1, \dots, A)$ mit Hilfe der Entwicklung (4.3) in handlicher Form angegeben werden kann.

$$T_{\text{eff}}(1, \dots, A) = \sum_i H_{\text{int}}^{(1)}(i) + \sum_{i < k} H_{\text{int}}^{(2)}(i, k) + \sum_{i < k < l} H_{\text{int}}^{(3)}(i, k, l) + \dots$$

$$\text{mit } H_{\text{int}}^{(1)}(i) = H_W(i) \quad (4.6)$$

$$\text{und } H_{\text{int}}^{(2)}(i, k) = \{g(i, k), H_W(k)\}$$

Da H_W nach Kapitel III geschwindigkeitsunabhängig genommen wird, gilt:

$$[H_W, g(r_{1k})] = 0 \quad (4.7)$$

Bei Beschränkung auf die ersten beiden Terme der Entwicklung von $T_{\text{eff}}(1, \dots, A)$ erhält man somit:

$$T_{\text{SRC}} = \sum_i H_W(i) + \sum_{i < k} 2 g(r_{ik}) H_W(i) \quad (4.8)$$

Da der effektive Streuoperator in erster Ordnung der Clusterentwicklung ein Zweiteilchenoperator ist, gibt er einen Mechanismus für alle Ein- und Zweiteilchenreaktionen bei μ -Absorption an.

Bezüglich des physikalischen Gehaltes weisen wir jedoch auf die Ausführungen der Vorbemerkung IV.1 hin.

(iii) Formeln für T_{SRC}

Im folgenden werden die Formeln für den Operator T_{SRC} in

der Darstellung irreduzibler sphärischer Tensoren angegeben.

H_w in Tensorschreibweise:

Nach Gl. II.4.5 gilt

$$H_w = \frac{G}{\sqrt{2}} \sum_{\varphi=0,1} l_0 f_{\varphi} \hat{\varphi} \Omega_{\varphi}^{[0]} \quad (4.9)$$

$$\text{mit } \Omega_{\varphi}^{[0]} = \begin{cases} 1 & \text{für } \varphi=0 \\ [\vec{\sigma}_p^{[1]} \times \vec{\sigma}_N^{[1]}]^{[0]} & \text{für } \varphi=1 \end{cases}$$

$$\text{und } f_{\varphi} = \begin{cases} f_v & \text{für } \varphi=0 \\ f_A & \text{für } \varphi=1 \end{cases}$$

Wir berücksichtigen weiter, daß $l_0 = 1 - \vec{\sigma} \cdot \hat{v} = 2\hat{k}_-$ der Projektor auf negative Parität ist. Da wir mit Eigenzuständen zu $H=-1$ für das Neutrino rechnen, ist die Ersetzung $l_0 = -2$ möglich. Man bekommt:

$$H_w = \sqrt{2} G \sum_{\varphi=0,1} f_{\varphi} \hat{\varphi} \Omega_{\varphi}^{[0]} \quad (4.10)$$

H_{int}⁽²⁾(1,2) in Tensorschreibung

Um H_{int}⁽²⁾(1,2) in der sphärischen Tensorbasis darstellen zu können, muß g(1,2) nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden [Hub 70] .

$$\begin{aligned}
 g(\tau_{12}) &= \int dq w(q) j_0(q\tau) \\
 &= 4\pi \sum_{\lambda} \hat{\lambda}^2 \int dq w(q) j_{\lambda}(q\tau_1) j_{\lambda}(q\tau_2) \left[Y_{(\hat{\tau}_1)}^{[0]} \times Y_{(\hat{\tau}_2)}^{[0]} \right]^{[0]} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

Diese Entwicklung wird in Gl. (4.8) eingesetzt. Man rechnet aus

$$H_{int}(1,2) = \tilde{G} \sum_{\lambda} \sum_{f=q_1}^{\infty} O^{[0]}(\lambda, f) \quad (4.12)$$

mit $\tilde{G} = 8\pi \sqrt{2} G$

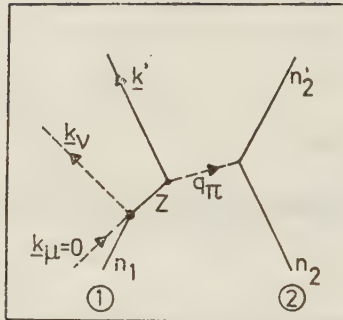
$$\begin{aligned}
 O^{[0]}(\lambda, f) &= f \hat{\lambda}^2 \int dq w(q) j_{\lambda}(q\tau_1) j_{\lambda}(q\tau_2) \times \\
 &\times \left[\left[Y_{(\hat{\tau}_1)}^{[\lambda]} \times Y_{(\hat{\tau}_2)}^{[\lambda]} \right]^{[0]} \times \Omega_f^{[0]} \right]^{[0]}
 \end{aligned}$$

IV. 3 π -Austausch-Modell bei hohem Impulstransfer

Im folgenden wird versucht, Reaktionen mit komplizierteren Reaktionsmechanismen bei ρ -Absorption durch π -Austausch in einer physikalisch sinnvollen, einfachen Weise zu beschreiben.

ρ -Absorption am Kern mit anschließendem π -Austausch wird in niedrigster Ordnung durch einen Graphen der folgenden Art beschrieben:

Fig. 4.3



Dieser Graph soll genähert berechnet werden.

Er schreibt sich als

$$T_{fi} = \langle f | V_q \frac{1}{E - H_0} H_w | i \rangle \quad (4.13)$$

Die Wechselwirkung wird also bestimmt durch die schwache Wechselwirkung H_w , die Propagation des Nukleons im Zwischenzustand $|z\rangle$ und die starke Wechselwirkung der beiden Nukleonen durch den Austausch eines π -Mesons. Zur Auswertung dieses Ausdrucks hat man Zwischenzustände $|z\rangle$ als vollständiges System von Basisfunktionen einzuschleiben. Dadurch geht (4.13) über in:

$$T_{fi} = \sum_z \frac{\langle f | V_q | z \rangle \langle z | H_w | i \rangle}{(m_\pi - E_\nu) + \epsilon_1 - \epsilon_z} \quad (4.14)$$

Dies bedeutet, daß das Nukleon 1 im Zwischenzustand die Energie $\Delta E = (m_\pi - E_\nu) + \epsilon_1 - \epsilon_z$, die nach Absorption des μ nicht in Anregungsenergie umgewandelt worden ist, transportiert.

Der Operator V_q ist der aus dem Ein-Pion-Austausch be-

rechnete Chew-Low-Operator:

$$V_q = \frac{(g_0)^2}{(2M)} \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \vec{q})}{q^2 + m^2} \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \quad (4.15)$$

IV.3.1. Vereinfachungen des Streuoperators

Der Ausdruck (4.13) soll auf eine wesentlich vereinfachte, der Emission schneller Nukleonen angepaßte Form gebracht werden. Hierzu werden Closure und Zero-Range Näherung unter Berücksichtigung der Dynamik des Problems durchgeführt.

(1) Closure

Hierbei wird die Energieabhängigkeit der Zwischenzustände $|Z\rangle$ vernachlässigt und die Zwischenzustandsenergie ϵ_Z aus (4.14) durch ihren wahrscheinlichsten Wert ersetzt.

$$\frac{1}{E - H_0} \longrightarrow \frac{1}{E - \langle H_0 \rangle} \quad (4.16)$$

Dies erlaubt es, die Vollständigkeit des eingeschobenen Funktionensystems auszunutzen. Man erhält:

$$\overline{T}_{fi} = \frac{\langle f | V_q | H_0 | i \rangle}{\Delta E}, \quad \Delta E = E - \langle H_0 \rangle \quad (4.17)$$

Mit Hilfe einer Zerlegung der Zwischenzustandssumme in ihren

diskreten und Kontinuumsanteil läßt sich die Zwischenzustandsenergie bei Emission schneller Nukleonen angeben (Anhang 3). Es zeigt sich dabei, daß Kontinuumsübergänge im Zwischenzustand nur sehr schwach beitragen und aus dem gebundenen Spektrum allein der Zustand mit der identischen Ortswellenfunktion nicht verschwindende Matrixelemente hat, so daß man $\epsilon_z = \epsilon_0$ setzen darf. Die aus Closure sich ergebende vereinfachte Form von T_{fi} ist damit:

$$T_{fi} = \frac{1}{\omega} \langle f | V_q H_w | i \rangle, \quad \omega = m_\pi - E_\nu \quad (4.18)$$

(11) Zero-Range-Näherung

Im folgenden soll eine Zero-Range-Näherung für den π -Austausch durchgeführt werden. Diese Näherung wird ermöglicht durch die relativ starke Impulskonzentration der Schalenmodellwellenfunktionen bei ungefähr 150 MeV/c. Um diese Näherung ausführen zu können, ist es nötig, das Übergangsmatrixelement T_{fi} im Impulsraum zu betrachten. (Wir verzichten in diesem Zusammenhang auf die hier unwichtigen Indizes und Kopplungen)!

$$T_{fi} = \frac{\hbar\omega}{\omega} \left(\frac{g_0}{2M} \right)^2 \int d^3q \left\{ \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{q^2 + m^2} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \rho_{n_1' n_2}(q) \right\} \tilde{\psi}_n(\vec{k}_1' + \vec{k}_2 + \vec{q}) \quad (4.19)$$

mit $\hbar\omega \tilde{\psi}_{n_1}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) = \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | H_W | n_1 \rangle$; $\vec{k}_1 = \vec{k}_1' + \vec{q}$

$$\text{und } \rho_{n_1' n_2}(q) = \int d^3k_2 \psi_{n_1'}^+(\vec{k}_2 + \vec{q}) \psi_{n_2}(\vec{k}_2)$$

Im Gegensatz zum π -Propagator, der eine glatte, monoton auf 1 ansteigende Funktion darstellt, sind Impulsamplitude und Übergangsdichte stark gepeakte Funktionen ihrer Argumente. Da das Integral über q wesentlich von der Übergangsdichte bestimmt wird, ist es erlaubt, den π -Propagator bei einem mittleren Impuls vor das Integral zu ziehen.

Der mittlere Impuls berechnet sich nach dem Mittelwertsatz:

$$\int_0^\infty q^2 dq \frac{q^2}{q^2 + m^2} \rho_{n_1' n_2}(q) = \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{q}^2 + m^2} \int_0^\infty q^2 dq \rho_{n_1' n_2}(q) \quad (4.20)$$

Mit diesem Ergebnis gehen wir in den Ausdruck für das Übergangsmatrixelement im Ortsraum ein.

Dieses lautet:

$$T_{fi} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{g_0}{2M} \right)^2 \int d^3x_1 d^3x_2 e^{-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \cdot \vec{x}_1} \chi_{fi}^{(1)} \psi_{n_2}(\vec{x}_2) \times \quad (4.21)$$

$$\times \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{q} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)} \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{q^2 + m^2} (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \psi_{n_2}(\vec{x}_2) \overline{H_W^{(1)}} \psi_{n_1}(\vec{x}_1)$$

$$\text{mit } \overline{H_W^{(1)}} = \{ \chi_{fi}^+ H_W \varphi_{\mu} \}$$

Durch die Ersetzung des Impulses $\underline{q}$ durch seinen Mittelwert im π -Propagator führt die $\underline{q}$ -Integration auf eine Ortsraum-Deltafunktion in Teilchen 1 und 2.

$$T_{fi} \approx \frac{1}{\omega} \left(\frac{g_0}{2M} \right)^2 \int d\vec{r} e^{-i(\underline{k}_v + \frac{\underline{k}}{2}) \cdot \vec{r}} \chi_f^{(1)} y_{n_2}^+(\vec{r}) \times \quad (4.22)$$

$$\frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + m^2} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) y_{n_1}(\vec{r}) H_W(1) y_{n_2}(\vec{r})$$

Aus dieser Gleichung läßt sich der Streuoperator für Emission schneller Nukleonen unter π -Austausch ablesen:

$$\hat{T} = v_N \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) H_W(1) \quad (4.23)$$

mit

$$v_N = \frac{1}{\omega} \left(\frac{g_0}{2M} \right)^2 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{\vec{q}^2 + m^2}$$

Für $\vec{q}$ ergibt sich bei ^{16}O 150 MeV/c.

IV.3.2 Erweiterung auf Deuteron- und Zweinukleonemission

Der in Kap. IV.3.1 abgeleitete Operator für Nukleonemission unter Einschluß eines Ein-Pion-Austausches kann ohne Schwierigkeiten auf Deuteron- und Zweinukleonemission angewandt werden.

(1) Deuteron-Emission

Um zu einem zu (4.22) analogen Operator für die Deuteron-Emission zu gelangen, geht man zum Übergangsmatrixelement

T_{fi} der Deuteron-Emission mit π -Austausch im Impulsraum. Dabei ziehen wir im Hinblick auf die angestrebte Zero-Range-Näherung die Deuteron-Relativwellenfunktion am Ursprung vor das Impulsintegral. Man bekommt:

$$\begin{aligned} T_{fi} \approx & \frac{h_w \phi_d(0)}{\omega} \left(\frac{g_0}{2M} \right)^2 \int d\vec{q} d^3\vec{k} \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \vec{q})}{q^2 + m^2} t_{n_2} \left(\frac{K_d}{2} - (\frac{\vec{k}}{2} + \vec{q}) \right) \times \\ & \times \tilde{t}_{n_1} \left(\frac{K_d}{2} + (\frac{\vec{k}}{2} + \vec{q}) + \frac{\vec{p}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

wobei K_d der CM-Impuls des Deuterons,

$\vec{k}$ der Relativimpuls eines Nukleons im Deuteron

und $\vec{q}$ der ausgetauschte π -Impuls ist.

Wenn wir berücksichtigen, daß K_d gegeben und $\vec{k}$ im betrachteten Fall klein sein soll, wird das Impulsintegral bestimmt durch den maximalen Überlapp der beiden gebundenen Wellenfunktionen. Dieser ist im Mittel am größten für gleiche Argumente. Also:

$$\vec{q} = -\vec{k} \quad (4.25)$$

Da $\vec{k}$ als Relativimpuls der beiden Nukleonen nicht orientiert ist, fällt die Tensorabhängigkeit im Propagator weg. Da die Deuteronwellenfunktion beim mittleren Deuteron-Relativimpuls $\tilde{k}$ gepeakt ist, setzen wir in den π -Propagator diesen Impuls ein. Damit bekommt man im Ortsraum:

$$T_{fi} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{q_0}{2M} \right)^2 \frac{1}{3} \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{k}^2 + m^2} \times \quad (4.26)$$

$$\times \int d^3 \vec{r}_1 d^3 \vec{r}_2 e^{-i(K_d + \vec{k}_v) \vec{r}_1} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \psi_{n_1}(\vec{r}_2) \bar{\psi}_{n_1}(\vec{r}) \psi_{n_2}(\vec{r})$$

Hieraus ergibt sich der Streuoperator:

$$T_d \approx v_d \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) H_v(1) \quad (4.27)$$

$$\text{mit } v_d = \frac{\phi_d(0)}{\omega} \left(\frac{q_0}{2M} \right)^2 \frac{1}{3} \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{k}^2 + m^2} (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)$$

Dabei hat man für ϕ_d die Deuteron-Relativwellenfunktion am Ursprung zu setzen, was prinzipiell nur die 0 ergeben kann. Man löst sich aus dieser Schwierigkeit mit Hilfe der im Ursprung nicht verschwindenden Hulthén-Wellenfunktion für das Deuteron. Diese Ersetzung ist auch physikalisch sinnvoll, da die hier durchgeführte Zero-Range-Näherung lediglich eine vereinfachte Beschreibung für eine nach Maßgabe des ausgetauschten Impulses ausgedehnte Wechselwirkung darstellt.

(11) 2-Nukleonen-Emission

Um den bei der 2-Nukleonen-Emission ausgetauschten mittleren $\vec{\tau}$ -Impuls $\tilde{\vec{q}}$ zu bestimmen, geben wir das Übergangsmatrixelement für diesen Endkanal an:

$$T_{fi} \sim \int d\vec{q} \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{q^2 + m^2} \psi_{n_2}(\underline{k}_2 + \underline{q}) \psi_{n_1}(\underline{k}_1 + \underline{k}_v - \underline{q}) \quad (4.27)$$

Analog seiner Festlegung beim Deuteronenstreuoperator wird der mittlere ausgetauschte π -Impuls durch den maximalen Überlapp der Impulswellenfunktionen bestimmt:

$$\tilde{\underline{q}} = \frac{1}{2} (\underline{k}_1 - \underline{k}_2) \quad (4.28)$$

Dabei sind $\underline{k}_1$ und $\underline{k}_2$ die Impulse der beiden emittierten Nukleonen. Mit diesem Ergebnis bekommt man als Streuoperator für die 2-Nukleonenemission:

$$\overline{T}_{2N} = v_{2N} \delta(r_1 - r_2) H_N(1) \quad (4.29)$$

$$v_{2N} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{g_0}{2M} \right)^2 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q})}{\tilde{q}^2 + m^2} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)$$

$$\tilde{q} = \frac{1}{2} (\underline{k}_1 - \underline{k}_2)$$

Dabei sind $\underline{k}_1$ und $\underline{k}_2$ die Impulse der emittierten Nukleonen.

Kap. V Matrixelemente bei μ -Absorption

V.1 Allgemeine Eigenschaften

Unser Ziel ist die Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten des Typs Gl. (2.6).

Nachdem Phasenraum und Streuoperator in der Schalenmodellbasis diskutiert sind, wenden wir uns der Berechnung der Matrixelemente des Streuoperators mit dem A-Nukleonensystem zu. Im folgenden wollen wir dies vor allem durch Antisymmetrisierung und Drehimpulskopplung bedingten Strukturen erläutern.

Dazu betrachten wir zuerst die Anfangs- und Endzustände. Der Anfangszustand wird gebildet durch einen Kern (^{16}O) mit Schalenabschluß im 0^+ -Grundzustand mit dem im 1s-Coulomb-Zustand gebundenen μ :

$$|I\rangle = |A(0^+); \mu(1s)\rangle \quad (5.1)$$

Die Kernwellenfunktion ist gegeben durch den antisymmetrisierten Schalenmodellansatz (Slaterdeterminante), der bei der Beschreibung von Kernen mit abgeschlossenen Schalen Kopplung zu 0^+ beinhaltet. Die Drehimpulskopplung mit der μ -Wellenfunktion ist für die 1s-Coulombfunktion trivial.

Der Endzustand $|F\rangle$ wird gebildet vom Restkern B, den nukleonischen Fragmenten X und dem Neutrino .

$$|F\rangle = |B, X, \nu\rangle \quad (5.2)$$

Die inneren Freiheitsgrade des Restkerns werden im Einteilchenschalenmodell beschrieben. Die durch den Recoil $\underline{k}_B$ verursachte Kernbewegung wird wie üblich als klein weggelassen, da der Beitrag der Kernbewegung in $\exp(i\underline{k}_B \underline{R})$ wegen $\underline{R}_B = \underline{r}_1/B$ (B : Zahl der Nukleonen im Restkern) für jedes Nukleon von der Größe $\underline{k}_B \underline{r}_1/B$ ist. Die nukleonischen Fragmente $X = n, p, d$ oder $n+N$ dagegen werden wegen ihres hohen Impulses durch ihre freie Bewegung und ihre Spin-Isospin-Freiheitsgrade bestimmt. Beim Deuteron tritt die Relativwellenfunktion hinzu. Im Gegensatz zum Anfangszustand gehört der Endzustand nicht zu gutem Gesamtspin, da er aus freien Fragmenten besteht. Um den Drehimpulsformalismus durchgehend anwenden zu können, müssen die auftretenden Wellenfunktionen nach Drehimpulsen entwickelt und die ungekoppelten Einzelteilchenwellenfunktionen nach gekoppelten Funktionen zum Gesamtspin entwickelt werden.

Dazu entwickeln wir zunächst die ebenen Wellen gemäß

$$e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} = 4\pi \sum_{\ell, m} i^\ell Y_m^{[\ell]}(\hat{\underline{k}})^+ \left\{ j_\ell(kr) Y_m^{[\ell]}(\hat{\underline{r}}) \right\} \quad (5.3)$$

Da eine gemeinsame Quantisierungsachse festgelegt werden muß, die Neutrinos jedoch Zustände zu negativer Helizität darstellen, entwickeln wir ihre Spinfunktion nach ihrer Projektion auf die gewählte Quantisierungsrichtung.

$$\chi_\nu(k=-1) = \sum_{s_\nu = -1/2}^{1/2} D_{s_\nu, -1/2}^{1/2}(\hat{\underline{s}}) \chi_{s_\nu}^{1/2} \quad (5.4)$$

Die Einteilchenwellenfunktionen zu gutem Drehimpuls lassen sich nach Eigenfunktionen zum Gesamtspin entwickeln. Damit ist der Endzustand dargestellt als Summe über gekoppelte Zustände $|F_g\rangle$.

$$|F\rangle = \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Kugelfunktionen der auslaufenden} \\ \text{Teilchen} \end{array} \right\} \quad (5.5)$$

$$\times \sum \left\{ \text{Clebsch-Gordan-Produkte} \right\}$$

$$\times |F_g\rangle$$

Diese Zerlegung gibt die allgemeine Struktur des Matrixelementes an:

$$T_{fi} = \sum \left\{ \begin{array}{l} \text{Kugelfunktionen der auslaufenden} \\ \text{Teilchen} \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

$$\times \sum \left\{ \text{Clebsch-Gordan-Produkte} \right\}$$

$$\times \left\{ \text{Geometriefaktor} \right\} \times T_R$$

mit $T_R = [F_g | \hat{T} | I]$

Das reduzierte Matrixelement läßt sich in Abhängigkeit vom Charakter des Operators auf ein Ein- bzw. Zweiteilchenmatrixelement reduzieren (Anhang 5), indem man allein den Anfangszustand antisymmetrisiert und nach Teilchen "1" bzw. "2" entwickelt.

$$[F_g(1, \dots A) | \hat{T}(1, \dots A) | I(1, \dots A)] \quad (5.7)$$

$$= [[F_g(1, 2) \times \text{Rest}] | \hat{T}(1, 2) | [\widetilde{I(1, 2)} \times \text{Rest}]]$$

Hierbei bedeutet Tilde "Antisymmetrisierung".

Da wir lediglich an Nukleonenspektren interessiert sind und auf Winkelverteilungen und Polarisationen keinen Wert legen, benötigen wir spingemittelte Übergangswahrscheinlichkeiten.

Spinmittelung geschieht durch Mittelung der magnetischen Quantenzahlen des Anfangszustandes und eine Summation über die magnetischen Unterzustände des Endsystems.

$$\overline{|T_{fi}|^2}^{\text{spins}} = \frac{1}{j_i^2} \sum_{m_i, m_f} |T_{fi}|^2 \quad (5.8)$$

Da bei der Spinmittelung die Quantisierungsrichtung nicht von Bedeutung ist, kann sie mit der Emissionsrichtung eines der wegfliegenden Teilchen identifiziert werden. Dadurch gehen in die Übergangswahrscheinlichkeit nur die Relativwinkel zwischen den Reaktionsprodukten ein. In den konkreten Rechnungen fallen die Kugelfunktionen entweder trivial (Drehimpuls gleich null) oder durch Raumwinkelintegration weg.

Für die betrachteten Reaktionen finden wir speziell:

$$\overline{|T_{fi}|^2}^{\text{spins}} = \frac{1}{4} (4\pi)^n \tilde{G}^2 T_R T_R'^* \quad (5.9)$$

wobei n die Zahl der in der Entwicklung des Endzustandes vorkommenden ebenen Wellen darstellt, $\tilde{G}$ die aus der Definition von T_R vorgezogene Kopplungskonstante ist. Die Summationen über Zwischendrehimpulse in T_R können nur in jedem speziellen Beispiel angegeben werden.

T_R selbst gibt das in (5.6) eingeführte reduzierte Matrixelement an.

V.2 Matricelemente

V.2.1 Neutronemission

(1) direkt

Als einziger Nukleonemissionsprozeß wird die Neutronemission nach μ -Absorption im IPM durch den elementaren Operator der schwachen Wechselwirkung bereits vermittelt.

Die Übergangswahrscheinlichkeit wird daher durch Einteilchenmatricelemente (A5.10) gegeben. Die Wellenfunktion des Anfangszustandes wird gemäß (A4.7) nach Nukleon μ entwickelt. Da H_w ein Teiteilchenoperator ist, führt direkte Neutronemission auf Einlochzustände von ^{16}O .

Unter Zuhilfenahme des Kopplungsdiagramms (A6.11) berechnet man nach den Regeln der Drehimpulsalgebra:

$$\begin{aligned}
 T_{fi}^{(A)} = G \bar{\varphi}_\mu \sum_{s_\nu, j, m_j} \hat{I}_F \left\{ 4\pi i^{\ell_f} Y_{m_{\ell_f}}^{[\ell_f]}(\hat{k}_p) D_{s_\nu, -\frac{1}{2}}^{1/2}(\hat{\omega}) \right\}^+ \times \\
 \times (-1)^{j-\frac{1}{2}+m_j+M_3+s_\mu} \int_{\ell_f} \left(\hat{s} \frac{1}{2} \hat{s} \right)^2 \begin{pmatrix} \ell_f & \frac{1}{2} & j \\ m_{\ell_f} & s_\mu & -m_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_F & j & s \\ M_F & m_j & -M_3 \end{pmatrix} \times (5.10) \\
 \times \begin{pmatrix} s & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ M_3 & s_\nu & -s_\mu \end{pmatrix} \left\{ j \ I_F \ s \right\} \delta_{T_F, \frac{1}{2}} (j \ell_f k_p) | R_f \rangle
 \end{aligned}$$

Das damit gegebene Übergangsmatricelement wird bestimmt durch:

1. seine Kopplungsstärke, die durch die elementare Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung und die Aufenthaltssamplitude des Myon am Kernort gegeben ist,

2. die Fouriertransformierte $\langle j_{\gamma}(k) | R_{\gamma} \rangle$ der Ortswellenfunktion des das μ absorbierenden Protons beim Recoillimpuls $\underline{k}_p = \underline{k}_n + \underline{k}_\nu$
 3. einen Faktor $\hat{I}_F$ für die Entartung der Protonenzustände,
 4. Abhängigkeiten von den Emissionswinkeln zur Quantisierungsachse.
- Spinmittlung ergibt nach (5.9) für das direkte Matrixelement bei Neutronemission:

$$|T_{fi}^{(0)}|^2 \overset{\text{spin s}}{=} \tilde{G}^2 \tilde{f}^2 \hat{I}^2 \hat{\frac{1}{2}}^2 |\langle j_{\gamma}(k_p) | R_{\gamma} \rangle|^2 \delta_{T_F, 1/2} \quad (5.11)$$

$$\text{mit} \quad \tilde{G}^2 = [G \bar{\psi}_{\mu} \tau^{1/2}]^2$$

$$\tilde{f}^2 = (f_v^2 + 3f_A^2)$$

Dieses Übergangsmatrixelement wird - ähnlich dem nicht spingemittelten Ausdruck - in seiner Kernstrukturabhängigkeit durch die Fouriertransformierte der Protonwellenfunktion gegeben. Im Gegensatz zu jenem sind durch Spinmittlung jedoch alle Richtungsabhängigkeiten weggefallen.

(11) Neutronemission über SRC

Nach den Ausführungen aus Kapitel IV wird Neutronemission nicht nur über H_w sondern auch durch den Zweiteilchenoperator $H_{int}(1,2)$ aus (4.12) induziert.

In diesem Abschnitt werden die Korrekturen des SRC-Operators an der Emission direkter Neutronen untersucht.

Wir betrachten also allein Übergänge in 1-Lochzustände.

Damit ist das Matricelement nach (A5.22) von der Gestalt:

$$T_{fi} = \frac{1}{2} \sum_{\delta} \langle k\delta - \delta k | H_{int}(1,2) | \gamma\delta - \delta\gamma \rangle \quad (5.12)$$

Dieser Ausdruck hat graphisch die folgende Form:

$$H_{fi} = \frac{1}{2} \sum_{\delta} \left\{ \begin{array}{c} k \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \middle| \begin{array}{c} k \\ \gamma \end{array} \right\rangle - \begin{array}{c} k \\ \delta \end{array} \middle| \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \delta \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{c} k \\ \gamma \end{array} \right\rangle \right\} \\ - \frac{1}{2} \sum_{\delta} \left\{ \begin{array}{c} \delta \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{c} k \\ \delta \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \middle| \begin{array}{c} k \\ \gamma \end{array} \right\rangle - \begin{array}{c} \delta \\ \delta \end{array} \middle| \begin{array}{c} k \\ \delta \end{array} \right\rangle \begin{array}{c} \delta \\ \gamma \end{array} \middle| \begin{array}{c} k \\ \gamma \end{array} \right\rangle \right\}$$

Dabei bedeutet x : schwache Wechselwirkung

 : SRC

Wir bemerken, daß der Term $\langle \delta k | H_{int}(1,2) | \delta \gamma \rangle$ wegfällt, da $H_{int}(1,2)$ den Isospin von Teilchen 1 ändert. Der Term $\langle \delta k | H_{int}(1,2) | \gamma \delta \rangle$ für die Emission des korrelierten Nukleons trägt nach [Wei 72] wegen der dort auftretenden Radialmatricelemente weniger bei als die direkten Matricelemente und ist diesen gegenüber vernachlässigbar. Die verbleibenden Terme $\langle k\delta | H_{int}(1,2) | \gamma\delta \rangle$ und $\langle k\delta | H_{int}(1,2) | \delta\gamma \rangle$ geben eine Ankopplung der Dichte des (A-1)-Teilchenrestkerns an.

Unter Zuhilfenahme der Entwicklung (A4.8) für die ^{16}O -Wellenfunktion und bei Benutzung der Kopplungsdiagramme (A6.12) und (A6.13) berechnet man für das Matricelement:

$$\begin{aligned}
 T_{fi}^{(2)} = & \tilde{G} \cdot \frac{1}{2} \sum_{\substack{s_n, \ell, m_\ell \\ j, m_j, j_1, m_{j_1} \\ j_2, m_{j_2}}} \left\{ 4\pi i^\ell Y_{m_\ell}^{[\ell]}(\hat{k}_p) D_{s_n, -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\hat{v}) \right\}^+ \\
 & \times \langle \ell, m_\ell; \frac{1}{2}, s_n | j, m_j \rangle \langle j_1, m_{j_1}; j_2, m_{j_2} | j, m_j \rangle \langle j_1, m_{j_1}; \frac{1}{2}, s_n | j_2, m_{j_2} \rangle \times \\
 & \frac{(\hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{1})^2}{\hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{1}} \sqrt{\frac{1+\delta_{\gamma\delta}}{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (1-(-1)^{j_1+j_2-j}) \delta_{\gamma\delta} + (1-\delta_{\gamma\delta}) \right\} \times \\
 & \times (-\frac{i}{\sqrt{2}})^{m_{\text{red}}} M_{\text{red}}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

mit $m_{\text{red}} = -i \hat{1}$

und

$$\begin{aligned}
 M_{\text{red}}^{(2)} = & - \sum_{\lambda, j_1, K_1} \frac{p_\gamma}{4\pi} \hat{s} \frac{1}{2} \hat{j}_1 \hat{1} (\hat{\ell}_\gamma \hat{\ell}_\delta \hat{\ell})^2 (\hat{j}_\delta \hat{j}_\delta \hat{1}) \hat{K}_1^2 \\
 & \times (-1)^{(\ell_\gamma + \ell)/2} (-1)^{\lambda + K_1 + j_1 + j_2 + \ell_\gamma + \ell_\delta + 1/2} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_\delta & \ell_\delta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \ell_\gamma & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \times \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ K_1 & \lambda & j_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ j_\delta & j_\delta & j_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_\delta & j_\delta & \frac{1}{2} \\ \ell_\delta & j_\delta & \lambda \end{matrix} \right\} \times \\
 & \times \int dq w(q) \langle R_\delta | j_1(q) | R_\delta \rangle \langle j_\ell(k_p) | j_2(q) | R_\gamma \rangle
 \end{aligned}$$

Dabei ist γ Beschreibung des Loches des ^{16}O -Anfangszustandes, δ die der über die SRC angekoppelten Zustände des Restkerns.

Die Definitionen der übrigen Quantenzahlen gehen aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten und dem Kopplungsschema (A6.12) bzw. (A6.13) eindeutig hervor.

Der in (5.13) erhaltene Ausdruck für das SRC-Matrixelement

vereinfacht sich noch wesentlich unter der Näherung der korrelierten Einzelteilchenwellenfunktion [Wei 72] .

Hierbei beschränkt man sich auf die Übertragung des Drehimpulses 0 durch die SRC. .

Diese Näherung ist für ^{16}O schon deshalb gut, weil wegen $\begin{pmatrix} \lambda & l_1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $l_1 = 0$ und 1 nur $\lambda = 0$ und 2 möglich ist. Beschränkung auf $\lambda = 0$ in (5.13) erbringt:

$$\begin{aligned} M_{\text{red}}^{(2)} = & - \sum_{j_1, j_2} \frac{f_8}{4\pi} \hat{s} \hat{\frac{1}{2}} \hat{j} (-1)^{l_1 + j_1 + 3j_2 + 2j + \frac{1}{2}} \\ & \times \left\{ \begin{matrix} j & j & j \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & l_1 \end{matrix} \right\} \Delta(F_{j_1, j_2, j}) \\ & \times \int dq w(q) \langle R_8 | j_0(q) | R_8 \rangle \langle j_{l_1}(q_p) | j_0(q) | R_y \rangle \end{aligned} \quad (5.14)$$

Das totale Übergangsmatrixelement für Neutronemission besteht in dieser Näherung aus einer Superposition von direktem und SRC-Matrixelement. Da die Clebsch-Gordan-Koeffizienten in beiden Fällen gleich sind, kann man schreiben:

$$T_{fi} = T_{fi}^{(1)} + T_{fi}^{(2)} \quad (5.15)$$

$$T_{fi} = \frac{\sqrt{2} G \bar{\psi}_r}{2} \hat{j}_x \hat{\frac{1}{2}} \sum \left\{ \text{Winkelfunktionen} \right\} \\ \times \sum \left\{ \text{Clebsch-Gordan-Produkte} \right\} \quad (5.15) \\ \times \sum_p f_p \hat{s} \hat{\frac{1}{2}} \hat{j} (-1)^{l_r+3j_r+p+2j+\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} j & j & s \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & l_y \end{matrix} \right\} \langle j_{e_y}(h) | \tilde{R}_y \rangle$$

$$\text{mit } \tilde{R}_y(r) = \left[1 - \int F_y(q) w(q) j_0(qr) dq \right] R_y(r)$$

$$\text{wo } F_y(q) = \sum_s (2\hat{j}_s^2 - \delta_{ys}) \langle R_s | j_0(q) | R_s \rangle$$

Dabei ist $\tilde{R}_y$ die modifizierte Einteilchenwellenfunktion. Sie wird bestimmt durch die Ankopplung der Impulsdichte des Restkerns an die Schalenmodelleinteilchenwellenfunktion des absorbierenden Protons nach Maßgabe der Gewichtsfunktion $w(q)$. Diese wird i.A. als Gaußverteilung um einen Mittelwert von 300-400 MeV/c angegeben. Im Kapitel VII wird eine Diskretisierung von $w(q)$ vorgenommen und anhand expliziter Rechnungen diskutiert.

V.2.2 Protonemission

Zur Protonemission tragen im Gegensatz zur Neutronemission wegen Isospin und Pauli-Prinzip nur 1-Teilchen-2-Lochzustände des ^{16}O -Cores bei.

Damit werden die hier auftretenden Endzustände im Schalenmodell charakterisiert durch

$$[[(\bar{\gamma} \times \bar{\delta})_{F\gamma\delta}, T_{\gamma\delta}] \times \gamma]^{I_F, T_F} \quad (5.16)$$

wo $\bar{\gamma}, \bar{\delta}$ die Lochzustände $F\gamma\delta, T_{\gamma\delta}$ den zu diesen Zuständen gehörenden Gesamtspin bzw. Gesamteisospin, γ einen 1-Teilchenzustand außerhalb abgeschlossener Schalen und I_F, T_F Endkernspin und Endkernisospin angeben. Wir rechnen das Übergangsmatrixelement des effektiven Absorptionsoperators mit $\bar{\kappa}$ -Austausch für die Endzustände (5.16) aus. Dies gelingt mit Hilfe des Kopplungsschemas (A6.15), wo die Entwicklung (A4.11) von (5.16) Verwendung findet.

$$\begin{aligned} T_{fi}^{(P)} &= \frac{1}{2} G_P \bar{\psi}_\mu \sum_{s_\gamma, \ell, m_\ell} \left\{ 4\pi i^\ell Y_{\ell m_\ell}^{[\ell]}(\hat{R}_x) D_{m, -1/2}^{1/2}(\hat{\psi}) \right\}^+ \times \\ &\times \sum_{j_x, m_{j_x}, F, M_F} \left\{ \langle \ell, m_\ell, 1/2, s_p | j_x, m_{j_x} \rangle \langle F, M_F; 1/2, s_\mu, 1/2, s_\mu \rangle \times \right. \\ &\quad \times \left. \langle I_F, M_F; j_x, m_{j_x} | F, M_F \rangle \right\} \\ &\frac{\hat{F}_{\gamma\delta} \hat{1}}{\frac{1}{2} \sqrt{1+\delta_{\gamma\delta}}} \times M_{Red}^{(P)} \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } M_{Red}^{(P)} &= \sum_{s_1, s_2, s_3} \frac{f_s}{4\pi} \hat{s} \hat{1} \hat{2} I_F(\hat{\ell} \hat{\ell}_\gamma \hat{\ell}_\delta \hat{\ell}_p)(\hat{j}_x \hat{j}_\gamma \hat{j}_\delta \hat{j}_p) \\ &\times (\hat{K}_1 \hat{L} \hat{1} \hat{S}_2)^2 (-1)^{(\ell + \ell_\gamma + \ell_\delta + \ell_p)/2} (-1)^{s + j_\gamma + j_\delta} \\ &\times \left\{ \begin{matrix} \kappa_1 s & F_{\gamma\delta} & s \\ I_F & j_\gamma & j_x \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \kappa_1 & F_{\gamma\delta} & s \\ s_1 & s_2 & L \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell_\gamma & 1/2 & j_\gamma \\ \ell_\delta & 1/2 & j_\delta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell_\gamma & 1/2 & j_\gamma \\ \ell & 1/2 & j_x \end{matrix} \right\} \\ &\times \left(\begin{matrix} \ell_\gamma & \ell & L \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \ell_\gamma & \ell_\delta & L \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right) \langle R_p j_\ell(k) | R_\gamma R_\delta \rangle \\ G_P &= 2\sqrt{2} G \cdot \frac{1}{3} \frac{\tilde{q}^2}{\tilde{q}^2 + m^2} \end{aligned}$$

Zum Vergleich geben wir das Übergangsmatrixelement in der SRC-Rechnung mit der Näherung $\hat{\lambda} = 0$ an.

(Die Auswertung geschieht mit Hilfe des Kopplungsschemas (A6.14))

$$\begin{aligned}
 M_{\text{Red}}^{(P)}(\text{SRC}) = & \sum_{g, K_1, K_3} \frac{f_g}{(4\pi)^{3/2}} \hat{g}^2 \frac{\hat{K}_1^2}{2} \hat{I}_F \hat{J} (\hat{j}_v \hat{j}_n \hat{j}_r \hat{j}_s) \hat{L}_v (\hat{K}_1 \hat{K}_3)^2 \\
 & \times (-1)^{(l_g + l_v + l_r)/2} (-1)^{g + j_n + K_1 + K_3} \Delta^g(l_g, l_v, l_r) \\
 & \times \left\{ \begin{matrix} g & 1/2 & 1/2 \\ l_r & K_1 & j_s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_r & s & K_1 \\ K_3 & j_s & j_s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} g & l_v & j \\ j_s & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} K_1 & j & K_3 \\ j_r & s & I_F \\ g & j & l_v \end{matrix} \right\} \quad (5.18) \\
 & \times \begin{pmatrix} K_3 & j_s & j_v \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \int dq w(q) \langle R_g j_e(l_g) | j_o(q) | R_f \rangle \langle j_e(l_r) | j_o(q) | R_s \rangle
 \end{aligned}$$

Die Bedeutung der in (5.17) und (5.18) auftretenden Drehimpulse wird aus den zugehörigen Kopplungsschemata in Anhang 6 evident.

Die Dynamik der Kernstruktur spiegelt sich in (5.17) und (5.18) in den dort jeweils auftretenden Radialintegralen.

In unserer Näherung des $\bar{T}$ -Austausches sind dies die Integrale:

$$\int R_g(r) R_f(r) R_s(r) j_e(kr) r^2 dr \propto \left(\frac{ka}{3}\right)^l e^{-3\left(\frac{ka}{3}\right)^2/2}, \quad (5.19)$$

die im Anhang 7 in der Oszillatorbasis berechnet und in Kapitel VII auch graphisch dargestellt sind.

In der SRC-Rechnung dagegen bekommt man eine in Teilchen

* 1" und "2" separierte Lösung:

$$\int w(q) dq \langle R_p j_e(k_r) | j_0(q) | R_Y \rangle \langle j_{\ell_8}(k_p) | j_0(q) | R_S \rangle \quad (5.20)$$

Während hier der Austausch des Impulses q die die Reaktion treibende Kraft darstellt, kann man in (5.19) von der Vorstellung ausgehen, daß die drei gebundenen Wellenfunktionen R_p , R_Y , R_S zu gleichen Teilen den Emissionsimpuls k aufbringen. Der in der Theorie der SRC durch die Gewichtsfunktion $w(q)$ gegebene ausgetauschte Impuls tritt in unserem Bild des π -Austausches gar nicht mehr auf. Nach der Ableitung des effektiven Operators unter Einbeziehung des π -Austausches in Kapitel IV ist jedoch die Reichweite des Operators in Zero-Range-Näherung im wesentlichen durch den mittleren ausgetauschten Impuls, in diesem Fall den mittleren Impuls der gebundenen Nukleonen gegeben. Damit beschreibt die Zero-Range-Näherung entgegen ihrer Bezeichnung langreichweitige Phänomene, die jedoch instantan über nur einen Zwischenschritt ablaufen.

Die spingemittelte Übergangswahrscheinlichkeit für Protonemission ergibt sich nach (5.9) für das Zero-Range-genäherte Matricelement zu:

$$\begin{aligned} \overline{\left| \frac{1}{f_i} \right|^2}^{spins} &= \frac{3}{16\pi} \left| \frac{G_P \bar{G}_R}{2} \right|^2 (f_V^2 + 3 f_A^2) \sum_{\ell} \left| \frac{\hat{I}_F \hat{J}_{\ell} \hat{J}_0}{\sqrt{1 + \delta_{\ell} \delta}} (\hat{j}_0 \hat{\delta} \hat{j}_0) \right. \\ &\times \begin{pmatrix} j_S I_F J_0 \delta \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_S j_8 J_0 \delta \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0 \end{pmatrix} \Delta(I_F, \ell, \frac{1}{2}) \Delta^8(\ell_S, \ell, J_0 \delta) \Delta^8(\ell_Y, \ell_8, J_0 \delta) \quad (5.21) \\ &\times \left. \langle R_S j_e(k_r) | R_Y R_S \rangle \right|^2 \end{aligned}$$

V.2.3 Deuteronemission in Zero-Range-Näherung

Die Deuteronemission wird bestimmt durch ein Matricelement der Struktur:

$$T_{fi}^{(d)} = G \bar{\varphi}_{\mu} \langle \psi_d(1,2) e^{i \frac{k}{2} R} | H_{int}^{(1,2)} | \psi_p^{(1)} \psi_n^{(2)} \rangle \quad (5.22)$$

Dieses Matricelement vereinfacht sich noch wesentlich, wenn man für den Operator $H_{int}^{(1,2)}$ den Zero-Range-Ansatz (4.27) macht. Unter Vernachlässigung von spinbedingten Faktoren erhält man als wesentliches Ergebnis:

$$T_{fi}^{(d)} \propto G \bar{\varphi}_{\mu} \psi_d(0) \langle e^{i \frac{k}{2} r} | \psi_p^{(1)} \psi_n^{(2)} \rangle \quad (5.23)$$

$$\underline{k} = \underline{k}_d + \underline{k}_v$$

wobei $r=r_1=r_2$

Damit wird die Deuteronemission neben der elementaren Kopplungskonstante G und der Aufenthaltssamplitude des μ am Kernort durch die Aufenthaltssamplitude des Deuterons am Kernort, die Stärke des π -Austausches und durch das Matricelement

$$\langle e^{i \frac{k}{2} r} | \psi_p^{(1)} \psi_n^{(2)} \rangle \sim \langle j_{\ell_{ps}}(k) | R_p R_n \rangle \quad (5.24)$$

bestimmt.

(5.24) läßt nun eine ähnliche Deutung zu wie das Matrixelement (5.19) der Protonemission in Zero-Range-Näherung. Im vorliegenden Fall wird der Impuls des Rückstoßkerns auf die beiden betrachteten gebundenen Nukleonen des Anfangskerns ^{16}O gleichmäßig verteilt. Das Verhalten des Matrixelementes (5.24) wird somit für hohe Impulse k_{Rec} im Oszillatorbild durch $\exp(-3(k_{\text{Rec}} a/3)^2/2)$ bestimmt. Die Matrixelemente (5.24) werden in Anhang 7 für Oszillatorwellen explizit ausgerechnet und werden in Kapitel VII auch graphisch gegeben. Die Berechnung des Übergangsmatrixelementes für Deuteronemission unter Berücksichtigung der Drehimpulskopplungen führt mit der Entwicklung (A4.9) für den Anfangszustand und unter Benützung des Operators (4.27) mit dem Kopplungsschema (A6.17) auf:

$$T_{fi}^{(d)} = \frac{1}{2} \bar{\varphi}_\mu \varphi_\mu(0) (2\pi G) \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{k}^2 + m^2} \frac{1}{3} \sum_{\ell, m} \left\{ 4\pi i e^{i\ell\phi} Y_{\ell m}^{(\ell)}(\hat{k}) \hat{Y}_{\ell m}^{(\ell)}(\hat{0}) \right\}^+ \quad (5.25)$$

$$\times \sum_{\substack{j_d, m_{j_d} \\ J, M_J}} \left\{ \langle \ell, m; 1, s_d | j_d, m_{j_d} \rangle \langle j_d, m_{j_d}; J, M_J | J, M_J \rangle \right. \\ \left. \langle J, M_J; \frac{1}{2}, s_p | \frac{1}{2}, s_p \rangle \right\} \\ \times \frac{\hat{J}_{\text{red}} \hat{1}}{\hat{2} \sqrt{1 + \delta_p \delta}} m_{\text{red}}^{(d)} M_{\text{red}}^{(d)}$$

$$\text{mit } m_{\text{red}}^{(d)} = 1/3$$

$$\begin{aligned}
 \text{und } M_{\text{Red}}^{(d)} &= \sum_{q,s} \frac{f_q}{\sqrt{4\pi}} \hat{p} \hat{1} \hat{\frac{3}{2}}^2 (j_d j_r j_s \hat{l}_r \hat{l}_s) \hat{S}^2 \times \\
 &\times (-1)^{(l_r+l_s+l)/2} (-1)^{j_{rs}+l+1} \begin{Bmatrix} l_r & 1/2 & j_r \\ l_s & 1/2 & j_s \\ l & s & j_{rs} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_d & j_{rs} & p \\ s & 1 & l \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & 1 & p \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} \\
 &\times \begin{pmatrix} l & l_r & l_s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (j_e(k) | R_r R_s)
 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Durch Spinmittlung vereinfacht sich dieser Ausdruck noch wesentlich:

$$\begin{aligned}
 |T_{fi}^{(d)}|^2 &= \frac{1}{2} G_d^2 \sum_{j_d} \left| \frac{j_d j_r j_s \hat{l}_r \hat{l}_s}{\hat{1} \sqrt{1+\delta_{rs}}} \Delta(j_d, 1, j_{rs}) \right. \\
 &\times \begin{pmatrix} j_{rs} & l_r & l_s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_{rs} & l_r & 1/2 \\ l_s & j_s & j_{rs} \end{Bmatrix} (j_{j_{rs}}(k) | R_r R_s) \left. \right|^2 \quad (5.26) \\
 \text{mit } G_d &= \bar{\varphi}_\mu \varphi_d(0) \sqrt{2} f_R \frac{1}{3} \frac{\tilde{k}^2}{k^2 + m^2}
 \end{aligned}$$

Dieses Matricelement hat bis auf spinbedingte Faktoren exakt die in (5.23) angegebene Gestalt.

Kap. VI Experimentelle und theoretische Situation

1. Experimente

Experimente mit der μ -Absorption an Atomkernen werden seit etwa 1950 durchgeführt [Con 47]. Man extrahiert aus diesen Experimenten Informationen über die schwache Wechselwirkung und die Kernstruktur. Bei μ -Absorptionsmessungen hat man den freien (rein leptonischen) Zerfall des Myons

$$\mu \rightarrow \nu_{\mu} + e + \bar{\nu}_e ; \quad P_{\mu} = 4.5 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \quad (6.1)$$

gegen die semileptonische Absorption an den Nukleonen zu diskriminieren, die vor allem bei leichten Kernen von der gleichen Größenordnung ist ([Wei 67] , [Hil 72]).

$$\begin{aligned} \mu + p &\rightarrow n + \nu & ; & \quad P = 169 \text{ sec}^{-1} \\ \mu + {}^6_0\text{O} &\rightarrow X + \nu & ; & \quad P = 1.36 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \\ \mu + {}^{40}_{18}\text{Ar} &\rightarrow X + \nu & ; & \quad P = 26.8 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \\ \mu + {}^{208}_{82}\text{Pb} &\rightarrow X + \nu & ; & \quad P = 129 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Entsprechend der geforderten experimentellen Information gibt es verschiedene Meßmethoden

- (i) Absorptionsmessungen und γ -Spektren
- (ii) Neutronenvielfachheiten, Neutronenspektren, Winkelverteilung und Neutronenpolarisation

(iii) Spektren geladener Teilchen

(iv) Deuteronen und Mehrnukleonenspektren.

Absorptionsmessungen liefern die totale μ -Absorptionsrate P_{tot} . μ -Spektren lassen sich lediglich für angeregte Endzustände aufnehmen. Sie liefern partielle Übergangsraten in diskrete Endzustände und geben damit Verzweigungsverhältnisse an.

Neutronenvielfachheiten für bestimmte Energieintervalle sind Vorstufen der Neutronenspektren. Aus Neutronenspektren lassen sich vor allem im Niederenergiebereich, wo Resonanzstrukturen auftreten zur Kernstruktur- und Reaktionsanalyse heranziehen. Winkelverteilungen und Polarisationsexperimente dienen zur Aufklärung der Wechselwirkungsstruktur.

Spektren geladener Teilchen und Spektren von Deuteronen sowie Mehrnukleonenspektren sind nahezu nicht bekannt, obgleich die Kenntnis der Energieverteilung der schnellen Protonen und Deuteronen in Ergänzung zur spektralen Verteilung schneller Neutronen Auskunft über das Mittelenergieverhalten des Kerns liefern muß.

Für die μ -Absorption an ^{16}O erhält man aus den bisher vorliegenden Meßergebnisse folgende Übersicht:

$$(1) \quad \text{Totale Absorptionsrate [Hil 72]} \quad P_{\text{tot}} = 1.36 \times 10^5 \text{ sec}^{-1} \quad (6.3)$$

$$\text{Partielle Übergangsrate [Ple 71]} \quad P_{1s1/2} = 7 \times 10^4 \text{ sec}^{-1} \quad (6.4)$$

$$P_{1p3/2} = 2.5 \times 10^4 \text{ sec}^{-1} \quad (6.5)$$

(11) Neutronenvielfachheit $\bar{n}$

$$\bar{n} = .526 \pm .068 \quad (6.6)$$

im Energiebereich (2.5 — 7.5 MeV)

$$\bar{n} = .78$$

im Energiebereich (0 — 18.2 MeV) (6.7)

Spektren: [Woj 72] Fig. 6.1

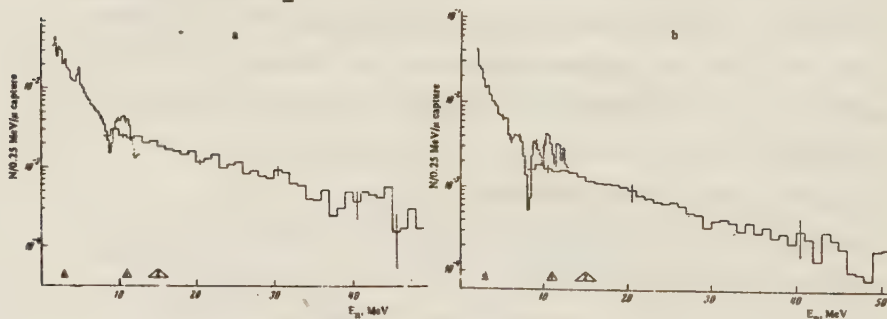
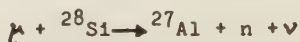


FIG. 2. Energy spectra of neutrons from μ capture: a—in S (for comparison with the data of ref. 5, in this figure in the region $E_n < 5.75$ MeV we have averaged the data over 0.25-MeV intervals). The data of ref. 5 are from 1.5 to 12.75 MeV, and the data of ref. 9 are from 8 to 49 MeV; b—in Ca; the data of ref. 5 are from 2 to 13 MeV, and the data of ref. 9 from 8 to 51 MeV

Die Spektren weisen einen thermischen Niederenergieanteil bis ca. 5 ~ 10 MeV [Sch 73 , Sin 62 , Kap 58, Kap 69], ein Resonanzgebiet bis etwa 18 MeV und ein direktes Spektrum ab etwa 18 MeV auf:

Das Spektrum enthält einen Niederenergieanteil bis 1.4 MeV aus dem Recoil des ^{27}Al -Kerns der Reaktion



Sobottka gibt als Vielfachheit geladener Teilchen pro Einfang an:

$$\bar{c} = .15 \pm .2 \quad (6.8)$$

wobei die Energien ab 1.4 MeV berücksichtigt wurden.

Das Maximum des Spektrums liegt bei 4.6 MeV.

Das Spektrum fällt im Gebiet bis 15 MeV relativ stark ab

Es werden 0.15 % geladene Teilchen pro μ -Absorption emittiert.

Etwa 3 % hiervon haben Energien über 26 MeV.

Man zählt also 0.5 % Protonen mit Energien oberhalb 26 MeV pro μ -Absorption.

2. Theoretische Situation

Überlegungen zur Kernstruktur wurden für μ -Absorption in verschiedenen Modellen gemacht. Am einfachsten war es, den thermischen Teil des Spektrums zu erklären [Sin 58, Sch 73, Kap 58, Kap 69].

Vor allem bei schweren Kernen hat das Modell von Singer [Sin 58], in qualitativer und quantitativer Hinsicht eine Klärung gebracht. Der resonante Teil des Neutronenspektrums konnte von Überall über Anregung

von Riesenresonanzanalogen Zuständen erklärt werden [Hil 72].

Die Berücksichtigung von Grundzustandskorrelationen hat hier eine weitere Verfeinerung gebracht und auch quantitativ die Spektren zu klären vermocht [Gre 69, Hok 73].

Zur Emission schneller Neutronen sind insbesondere die Arbeiten von Piketty und Procureur [Pik 71] und die von Erhamzyan [Era 72, Era 73] interessant.

Piketty führt eine relativistische Rechnung durch und berücksichtigt die Wechselwirkung der schnellen emittierten Neutronen mit dem Restkern durch eine Eikonalisierung der ebenen Neutronenwelle.

Fig. 6.3

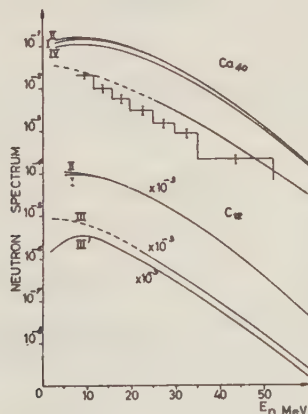


Fig. 7.

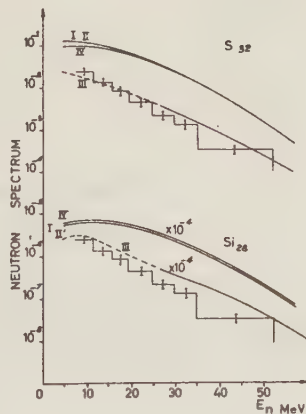
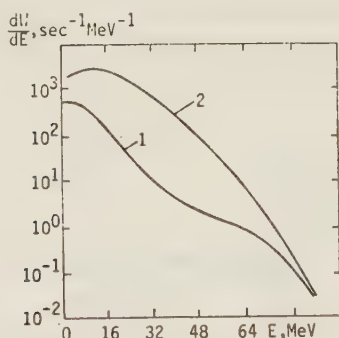


Fig. 8.

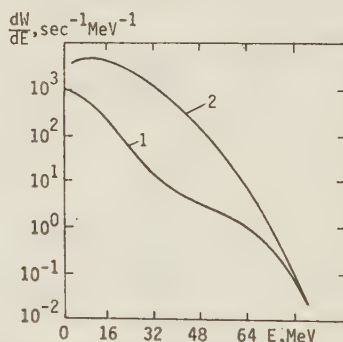
Figs. 3 to 8. Effects of relativistic corrections and final-state interaction (on neutron asymmetry 3 to 6 and spectrum 7 and 8). Curves I, II, III are calculated with plane wave neutrons including M^{-1} (I), M^{-2} corrections (II) and using average μ wave function $|\bar{\varphi}|^2 = Z^4 e^4 / \pi a^3 Z$ (ref. [15]). Curves III and III' are calculated with distorted neutron wave function taking $\text{Im } V = 0$ and $\text{Im } V \neq 0$ respectively. The experimental data are taken from [3]. Curve III'' on fig. 6 corresponds to the low-energy distorted neutron calculation (with partial wave expansion). Curve V on fig. 6 is calculated neglecting M^{-2} terms and nucleon momentum terms.

Dabei zeigt sich, daß eine Berücksichtigung der Distorsion der auslaufenden Welle die Neutronenspektren ganz wesentlich beeinflußt. Bereits ein rein reelles optisches Potential führt zu einer Verminderung der Übergangsrate um einen Faktor 10. Reabsorption im Imaginärteil senkt die Übergangsrate weiter um etwa einen Faktor zwei. Im Gegensatz zu einer Rechnung im Schalenmodell mit ebenen Wellen reproduzieren DWBA-Rechnungen die Experimente. Zu vergleichbaren Resultaten gelangt Erhamzyan [Era 72, Era 73] unter Berücksichtigung von Anfangszustandskorrelationen und in einer konsistenten DWBA-Rechnung für die emittierten Neutronen.

Fig. 6.4



$^{16}\text{O}(\mu^-, \nu n)^{14}\text{N(g.s.)}$: (1) distorted-wave calculation with the potential (6) and (2) plane-wave approximation.



$^{16}\text{O}(\mu^-, \nu n)^{14}\text{N}(1^-, 6.33 \text{ MeV})$: (1) distorted-wave calculation with the potential (6) and (2) plane-wave approximation.

Rechnungen zur Emission von geladenen Teilchen und Deuteronen existieren noch nicht. Auch Mehrnukleonenemission ist nicht berechnet worden.

Kapitel VII: Ergebnisse aus eigenen Rechnungen

Im vorliegenden Kapitel sind die Ergebnisse aus eigenen Rechnungen zusammengestellt, die mit den in den Kapiteln II bis V hergeleiteten Formeln erzielt worden sind. Sie werden mit experimentellen Resultaten und denen anderer Theorien verglichen.

Im einzelnen handelt es sich dabei um die Spektren von Neutronen, Protonen und Deuteronen nach μ -Absorption. Darüberhinaus werden die zugehörigen partiellen bzw. totalen Übergangsraten angegeben.

1. Spektren von Neutronen nach μ -Absorption

Im folgenden sollen die in Kapitel VI angeführten Daten mit den Ergebnissen aus der Theorie der vorliegenden Arbeit verglichen werden.

Dadurch werden Aussagen über den Reaktionsmechanismus bei der Neutronemission nach μ -Absorption möglich.

Das Neutronenspektrum wird durch den allgemeinen Ausdruck (2.11) gegeben:

$$\frac{dP^{\text{Spins}}}{dT_n} = \frac{2}{(2\pi)^4} \frac{c}{(\hbar c)^5} \int |\overline{T_{fi}}|^2^{\text{Spins}} k_n E_n k_v E_v d\Omega_{nv} \quad (7.1)$$

mit $T_{fi} = \langle F | H_w | I \rangle$

Die einfachste Betrachtung der Neutronemission geht vom

Einteilchenschalenmodell aus und beschreibt das Neutron in erster Bornscher Näherung (PWBA) als ebene Welle.

Dieses Modell führt auf das Matricelement (5.11):

$$\overline{|T_{fi}|^2}^{\text{spins}} = (\tilde{G} \tilde{f} \hat{\frac{1}{2}} \hat{I}_F)^2 |R_f(k_p)|^2 \quad (7.2)$$

mit $\tilde{G} = G \bar{\varphi}_p \pi^{1/2}$

$$\tilde{f}^2 = (f_v^2 + 3f_A^2)$$

und $R_f(k_p) = \int r^2 dr j_f(k_p) R_f(r)$

Das Neutronenspektrum wird damit durch die Impulsverteilung des absorbierenden Protons allein bestimmt.

Dieses Modell führt auf eine totale Übergangsrate für β -Absorption, die etwa einen Faktor 2 über dem experimentellen Wert liegt. Darüberhinaus ist der Abfall des Spektrums zu hohen Impulsen zu stark.

Für eine realistischere Betrachtung des Emissionsprozesses bestehen im wesentlichen zwei Möglichkeiten:

1. Modifikation der Kernwellenfunktion
2. Berücksichtigung der Endzustandswechselwirkung (final state interaction) beim auslaufenden Nukleon.

Modifikationen der Kernwellenfunktionen lassen sich auf zwei Arten einführen:

- (1) Durch Berücksichtigung langreichweitiger Korrelationen.

Dies bedeutet eine Aufweichung der Fermikante des Anfangskerns durch eine Entwicklung nach Teilchenloch-

konfigurationen. Ähnlich wird der Endkern nicht mehr durch eine reine Einlochkonfiguration sondern durch Beimischung höherer Konfigurationen im Teilchenlochformalismus beschrieben.

- (ii) Durch Berücksichtigung kurzreichweitiger Korrelationen in den Kernwellenfunktionen. Dieses in Kapitel IV beschriebene Modell eignet sich besonders für Beschreibung von Prozessen mit hohem Impulsübertrag; also die Emission schneller Nukleonen.

Die Berücksichtigung der Endzustandswechselwirkung des emittierten Nukleons geschieht mit Hilfe des optischen Modells. Danach bewegt sich das auslaufende Nukleon im mittleren Einteilchenpotential des Restkerns. Dadurch wird eine Abschwächung des Stroms auslaufender Teilchen durch Reabsorption und eine Phasenverschiebung der auslaufenden Welle beim Durchqueren des Einteilchenpotentials hervorgerufen.

Bei einer Berechnung der Absorptionsrate atomar gebundener Myonen spielen Reabsorptionsprozesse keine Rolle, da auf jegliche Information über die Ausgangskanäle verzichtet wird. Sie wird folglich mit einem rein reellen optischen Potential errechnet. Bei der Berechnung eines Nukleonenspektrums hat man darüberhinaus zu beachten, daß Nukleonen aus dem direkten Kanal herausgestreut werden können. Dies berücksichtigt man mit Hilfe eines imaginären Anteils zum optischen Potential. Das optische Potential selbst wird durch empirische Ansätze gegeben. Für hohe Emissionsenergie $T_{em} < V_{opt}$ ist die

quasiklassische Eikonalnäherung gerechtfertigt. Sie erlaubt es, die auslaufende Nukleonenwelle als ebene Welle mit einem komplexen, impulsabhängigen Phasen- und Dämpfungsfaktor anzugeben.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit haben wir uns auf eine genauere Betrachtung der hochenergetischen Nukleonen beschränkt. Damit waren der SRC-Ansatz für die Kernwellenfunktion und Eikonalnäherung für die auslaufenden Nukleonen ausreichend. Eine weitere Betrachtungsweise bestünde in der Berücksichtigung des π -Rescattering, wie es für Proton- und Deuteronemission durchgeführt wurde.

Da die Rescatteringeffekte für Neutronemission sowohl in der Größenordnung als auch im Verlauf denen bei Protonemission (siehe Fig. 7.10 und Fig. 7.11) entsprechen, würden diese Effekte bei kleinen Emissionsimpulsen vom direkten Teil des Spektrums überlagert, das zudem durch Final State Interaction dominiert wird. Bei hohen Emissionsimpulsen dagegen würden sie von SRC vollkommen überdeckt.

Bei der Betrachtung der eigenen Ergebnisse beginnen wir mit den Neutronenspektren in Bornscher Näherung. Diese werden im IPM und in der korrelierten Basis angegeben. Das Matrixelement mit korrelierten Wellenfunktionen ist in (5.15) errechnet und unterscheidet sich vom IPM-Matrixelement durch die Ersetzung der unkorrelierten Wellenfunktion durch die korreliert:

$$\tilde{R}_f(r) = [1 - \int dq w(q) F_f(q) j_0(qr)] R_f(r) \quad (7.3)$$

Die Gewichtsfunktion $w(q)$ für den in der korrelierten Einzelteilchenwellenfunktion ausgetauschten Impuls q wird im allgemeinen als Gaußverteilung angesetzt:

$$w(q) = \frac{2}{\Delta q \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{q-\bar{q}}{\Delta q}\right)^2} \quad (7.4)$$

Wir nähern diese Gewichtsfunktion durch die diskretisierte Näherung $w_H(q; \bar{q}, \Delta)$ [Hec 75]:

$$w_H(q; \bar{q}, \Delta) = \frac{1}{2} \delta(q-\bar{q}) + \frac{1}{4} \left\{ \delta(q-(\bar{q}-\Delta)) + \delta(q-(\bar{q}+\Delta)) \right\} \quad (7.5)$$

Diese Verteilung vermag die Charakteristika der Gaußverteilung besser zu reproduzieren als die oft verwendete Verteilungsfunktion:

$$w_\delta(q) = \delta(q-\bar{q}) \quad (7.6)$$

VII.1.1 Einzelteilchenimpulsverteilung

Welchen Einfluß eine Modifikation der Schalenmodellwellenfunktionen durch Mitnahme von SRC auf die Spektren haben wird, sieht man am einfachsten an der Einzelteilchenimpulsverteilung.

Zur Diskussion führen wir abkürzende Bezeichnungen ein:

$$r_Y(k; \bar{q}, \Delta) = \int dq w_H(q; \bar{q}, \Delta) \bar{F}_Y(q) \left(r^2 d + j_Y(kr) j_0(qr) \right) R_Y(r) \quad (7.7)$$

$$P_Y(k; \bar{q}, \Delta) = R_Y(k) - r_Y(k; \bar{q}, \Delta)$$

Die Figuren 7.1 und 7.2 zeigen die Impulsverteilungen

$$R_Y(k)^2, \quad r_Y(k; \bar{q}, \Delta)^2 \quad \text{und} \quad P_Y(k; \bar{q}, \Delta)^2.$$

Wir bemerken, daß der SRC-Anteil der Wellenfunktion $r_Y(k; \bar{q}, \Delta)$ wesentlich gewichtet wird durch den Wert des Formfaktors $F_{\bar{q}}(q)$ in der Nähe des mittleren Korrelationsimpulses q . Durch die starke Variation von $F(q)$ in der Umgebung von $q = 1,6 \text{ Fm}^{-1}$ ändert sich vor allem für $\Delta = 0$ der SRC-Beitrag bei geringen Änderungen von q sehr kräftig (Fig. 7.3).

Die SRC-modifizierte Impulsverteilungen haben bei $k \approx \bar{q}$ ein lokales Maximum. Daher wird das Emissionsspektrum bei Impulsen dieser Größenordnung eine deutliche Anhebung gegenüber dem Schalenmodellwert erfahren.

VII.1.2 Neutronenspektrum in Bornscher Näherung

Die Figur 7.4 zeigt das Neutronenspektrum für den $^{15}\text{N}(1/2^+)$ bzw. den $^{15}\text{N}(3/2^-)$ -Endzustand. Das Spektrum besitzt die in VII.1.1 vorausgesagte Struktur.

Das in Fig. 7.2 auftretende Maximum des SRC-Beitrages $r(k; q, 0)$ zur Einzelteilchenimpulsverteilung bei etwa $1,5 \text{ Fm}^{-1}$ zeigt sich jedoch im Spektrum wesentlich unterdrückt. Im Gegenteil erscheint das scharfe Minimum der korrelierten Impulsverteilung betont.

Diese Eigenschaft läßt sich aus der speziellen Gestalt des Dreiteilchenphasenraums mit dem relativistischen, masselosen Neutrino erklären (Fig. 2.2). Während für Emissionsenergien um 50 MeV der Phasenraum in logarithmischer Darstellung relativ eben verläuft, und das Spektrum folglich durch die Kernmatrixelemente bestimmt wird, tritt zu hohen Emissionsenergien hin eine Einschnürung des Phasenraums proportional E_{ν}^2 ein, wobei die Neutrinoenergie gerade die nach Abzug der

Fig. 7.1

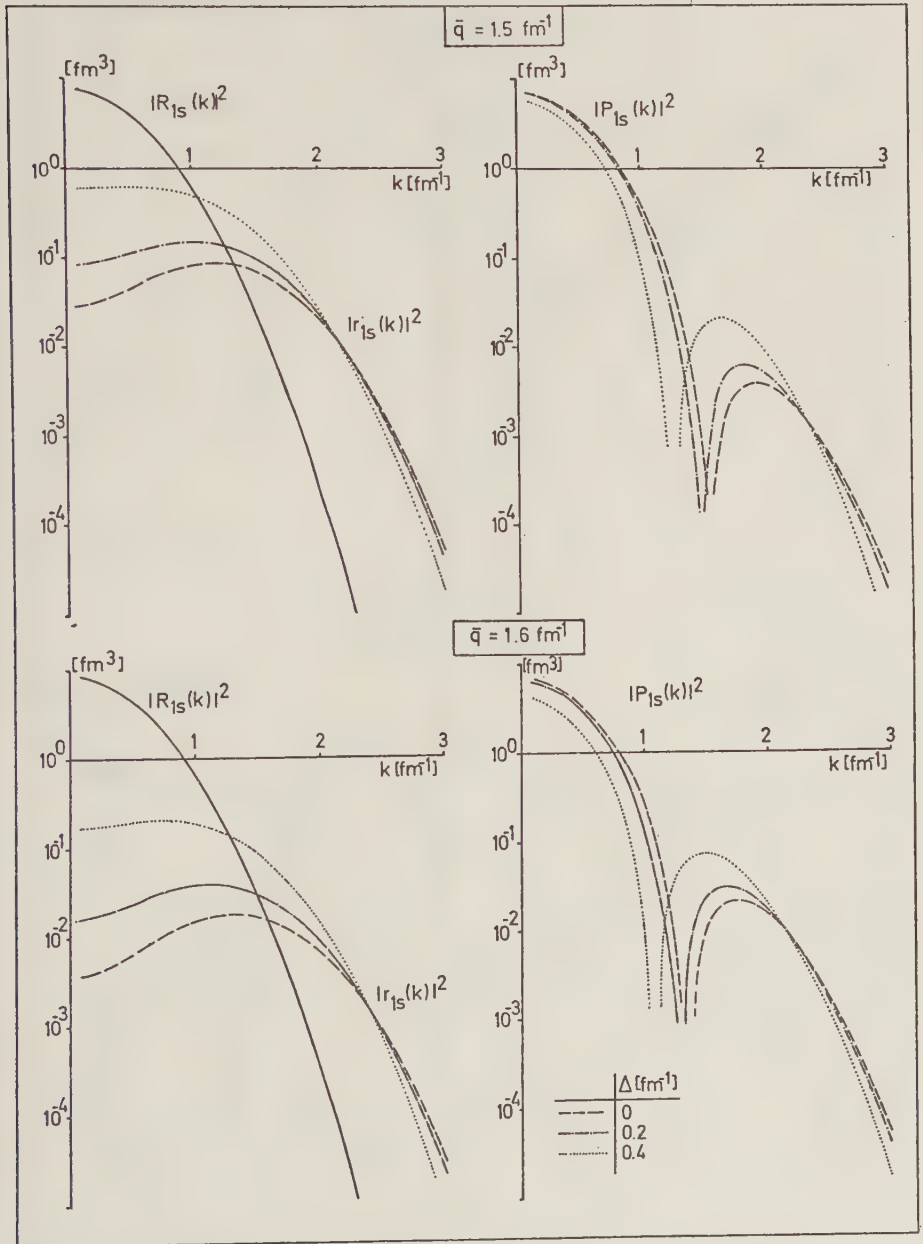
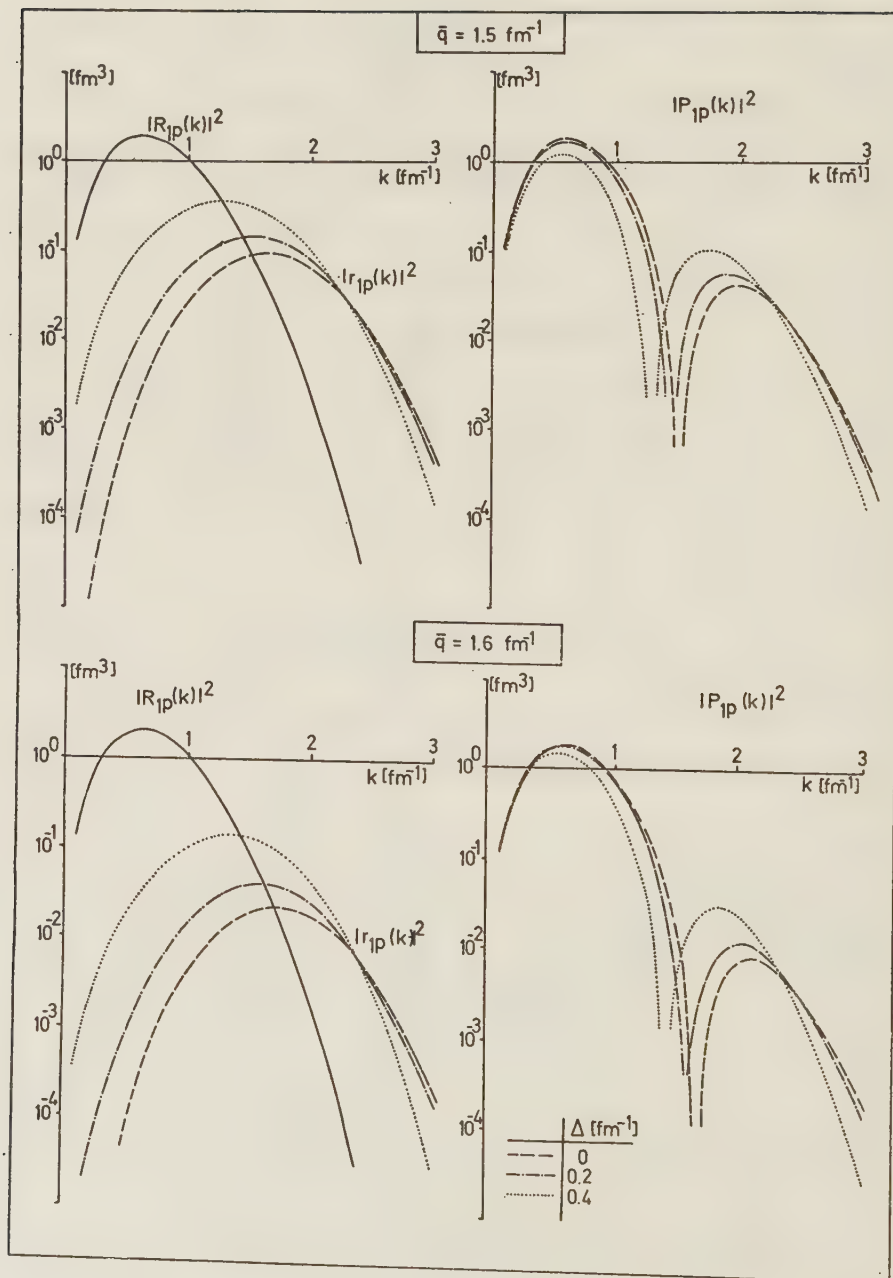
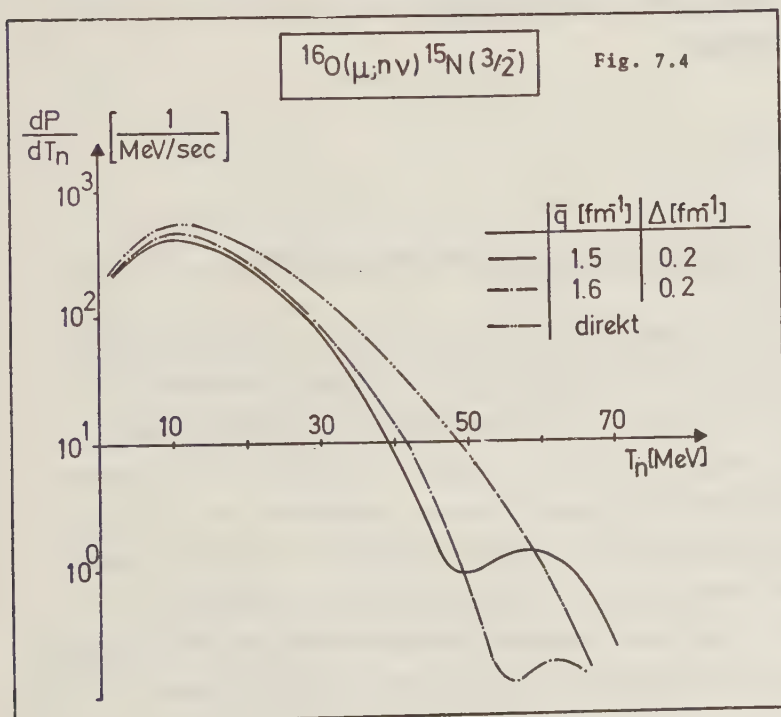
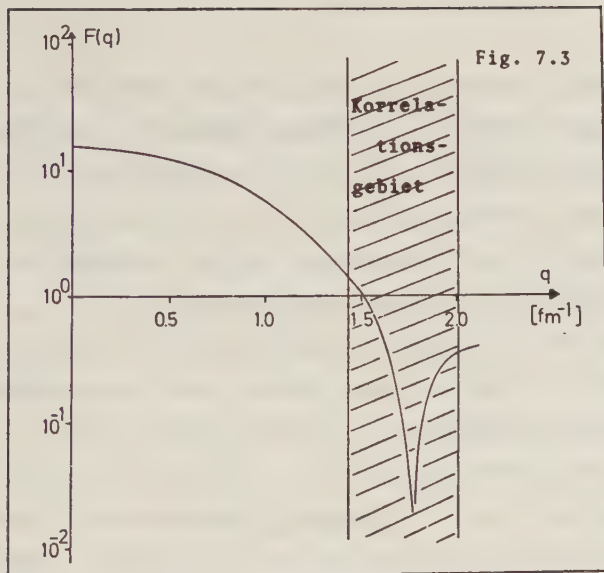


Fig. 7.2





Neutronanregung verbleibende Energie aus der Masse des absorbierten Myons darstellt. Aus diesem Grund fällt der Phasenraum bei Emissionsenergien um 70 MeV, was einem Impuls von 1.5 bis 1.6 Fm^{-1} entspricht, auf Null ab. Damit haben SRC gerade die sich in den vorliegenden Spektren zeigende, relativ geringe Bedeutung für das Gesamtspektrum.

Vor allem werden die totalen Übergangsraten durch die vorliegende SRC-Beschreibung mit ebenen Wellen nicht reproduziert, da das Maximum des Spektrums bei 10 bis 20 MeV liegt und daher durch die Einteilchenstruktur des Kerns bei niedrigen Energien dominiert wird. Die in diesem Energiebereich wichtigen Korrekturen sich langreichweitige Korrelationen und die Endzustandswechselwirkung des emittierten Neutrons mit dem Restkern.

VII.1.3 Einfluß der Endzustandswechselwirkung

Der Einfluß der final state interactions auf die Deuteron-spektren ist in der Arbeit [Pik 71] unter Verwendung eines reellen Potentials in Eikonalnäherung untersucht worden. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Fig. 6.4 gegeben. Der Einfluß von Distorsionen der auslaufenden Welle erweist sich also als massiver Effekt. Die totalen Übergangsraten werden um einen Faktor zwei bis drei vermindert. Im Trend identische Ergebnisse liefern Rechnungen von Eramzhyan und Salganic [Era 73], die mit exakten Streulösungen in

einem komplexen optischen Potential arbeiten (Fig. 6.3)

Im Hinblick auf die Beschreibung schneller Neutronen beschränken wir uns auf Eikonalnäherung und Verwendung eines rein absorptiven optischen Potentials. Dadurch gewinnt man einen realistischen Verlauf der Spektren - insbesondere bei hohen Emissionsenergien, wo der Einfluß des reellen Anteils des optischen Potentials auf das emittierte Teilchen sehr gering wird.

Wir verwenden eine eikonalisierte Welle von der Gestalt

$$\chi_{\underline{k}}(\underline{r}) = F(\underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} \quad (7.8)$$

mit
$$F(\underline{k}) = \exp \left[-\frac{Mc^2}{\hbar c^2 k} \sqrt{\pi} R W_0 \right]$$

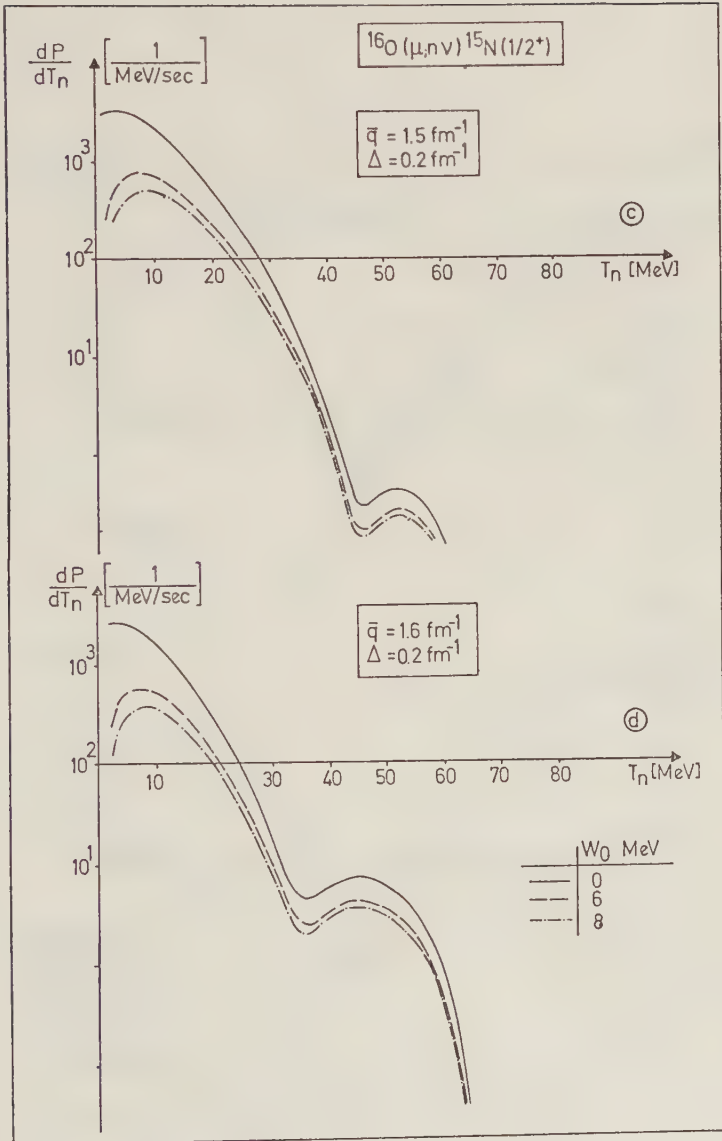
wobei $R \approx 3$ Fm der Kernradius von $^{16}_0$,

$W \approx 8$ MeV die Stärke des absorbierenden Anteils
von V_{opt}

k der Emissionsimpuls ist [Hod 63, D11 72]

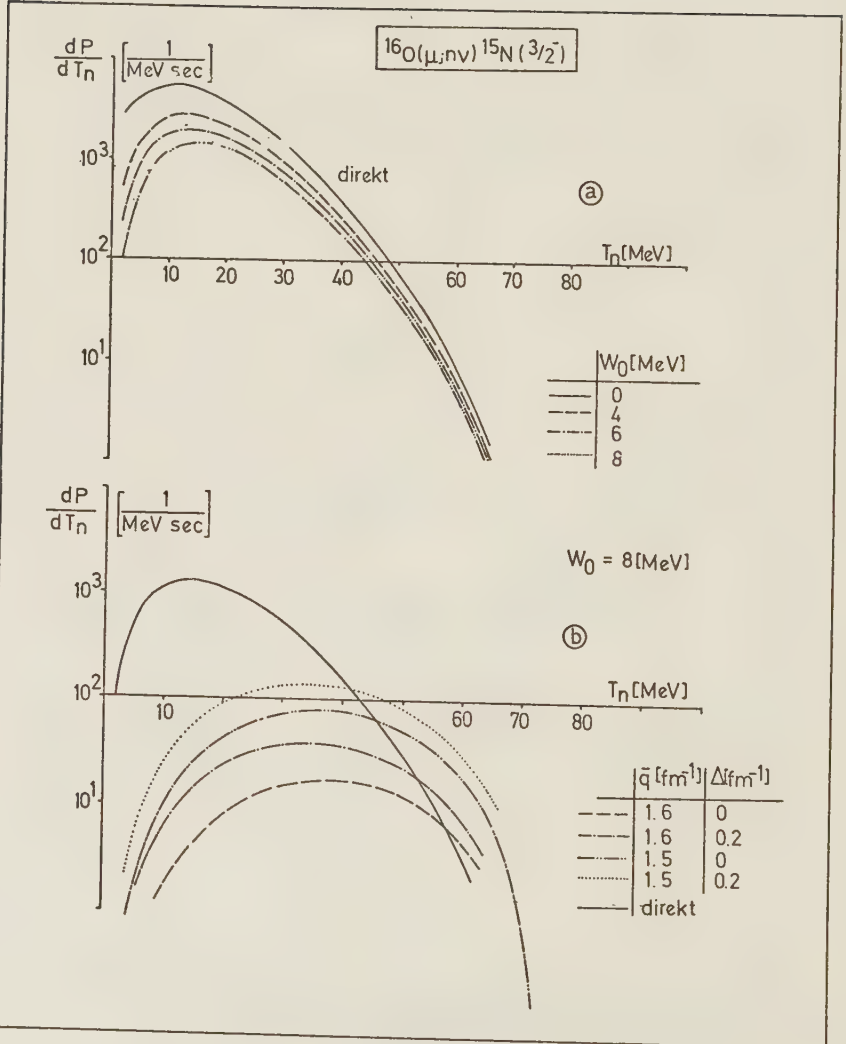
Die Figuren (7.5a) bis (7.5d) zeigen das Neutronen-Spektrum, seine Konstituenten sowie die Abhängigkeiten von den Parametern $W_0, \bar{q}$ und Δ für den $^{15}_N(1/2^+)$ -Endzustand. Die Figuren (7.6a) bis (7.6d) zeigen die entsprechenden Ergebnisse für den $^{15}_N(3/2^-)$ -Endzustand.

Fig. 7.5



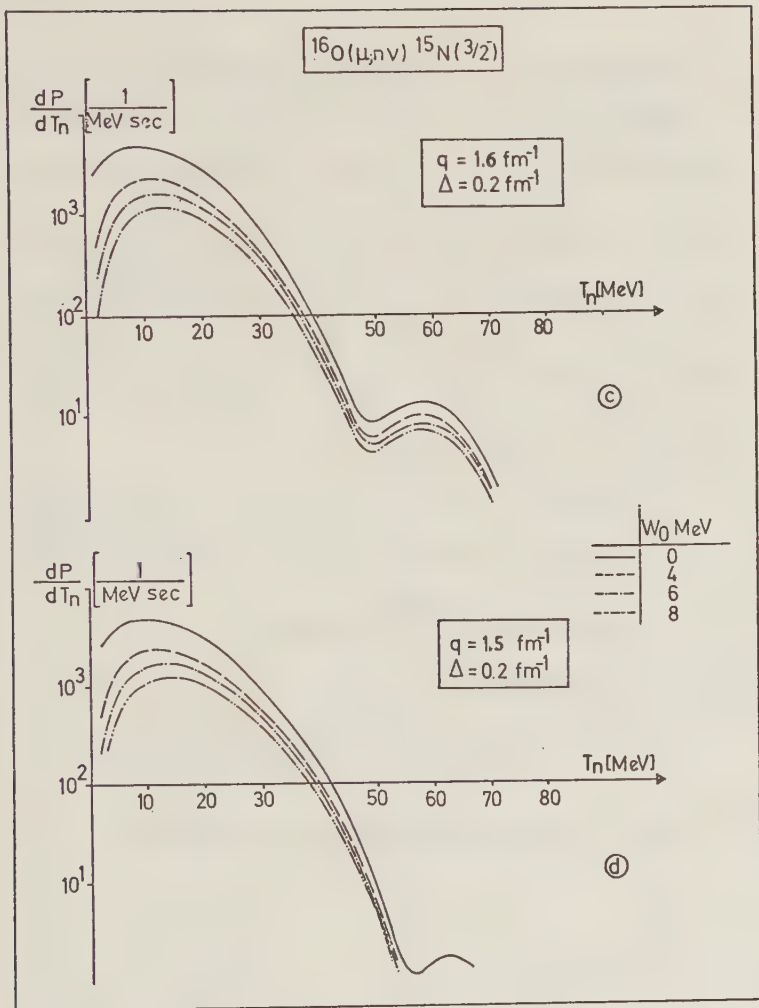
SRC-modifiziertes Neutronenspektrum von ^{16}O

Fig. 7.6



Direktes Spektrum a: für IPM-Oszillatorwellenfunktionen
b: Gegenüberstellung von IPM-
und SRC-Beitrag

Fig. 7.6



SRC-modifiziertes Neutronenspektrum von ^{16}O

VII.1.3 Partielle and totale Übergangsraten

Die berechneten bzw. beobachteten Spektren lassen sich über die Energie integrieren. Dadurch bekommt man die partiellen Übergangsraten in einen definierten Anregungszustand des Restkerns. Durch Addition der partiellen Übergangsraten wird man zur totalen Absorptionsrate für Neutronemission geführt. Ein Vergleich der so aus den verschiedenen Theorien erhaltenen Größen untereinander und mit dem Experiment gibt global den Einfluß von Eikonalisierung und SRC auf die Neutronenspektren an.

Wir führen folgende Bezeichnungen:

P_{f1} : partielle Übergangsrate im direkten Übergang IPM

$\tilde{P}_{f1}$: partielle Übergangsrate mit korrelierter Einzelteilchenwellenfunktion

P_{f1} : SRC-Beitrag zur Übergangsrate

b_Y : Bindungsenergie des Lochniveaus

Parametersätze (I): $\bar{q} = 1.5 \text{ fm}^{-1}$; $\Delta = 2 \text{ fm}^{-1}$

(II): $\bar{q} = 1.6 \text{ fm}^{-1}$; $\Delta = 2 \text{ fm}^{-1}$

Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 zusammengefaßt.

Tabelle 1 : Partielle und totale Übergangsrate direkter Neutronen

	b [MeV]	(MeV) w_o	$P_{f1} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$	$P_{f1} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$		$\sim P_{f1} \left[\frac{1}{\text{sec}} \right]$	
				(I)	(II)	(I)	(II)
$1s^{1/2}$	40	0	5.30×10^4 1.06×10^4	5.6×10^3 1.8×10^3	1.44×10^3 4.3×10^2	3.7×10^4 5.3×10^3	4.1×10^4 7.5×10^3
$1p^{1/2}$	19	0 8	8.43×10^4 2.36×10^4	1.0×10^4 4.3×10^3	2.6×10 1.1×10^3	5.5×10^4 1.4×10^4	6.8×10^4 1.8×10^4
$1p^{3/2}$	30	0 8	1.21×10^5 3.3×10^4	1.2×10^4 4.9×10^3	2.9×10^3 1.2×10^3	8.0×10^4 2.0×10^4	9.97×10^4 2.56×10^4
total		0 8	23.75×10^4 6.46×10^4	2.76×10^4 1.1×10^4	6.9×10^3 2.8×10^3	17.22×10^4 3.89×10^4	20.91×10^4 5.11×10^4

Die Tabelle zeigt, daß die totale Übergangsrate direkter Neutronen sowohl durch SRC als auch durch FSI (Final State Interaction) verringert wird, wobei sich der Einfluß der FSI als dominant erweist. Während nämlich SRC eine Verringerung der Emissionsrate um circa 25 % bewirken, ruft die Berücksichtigung der FSI eine Abnahme um etwa 75 % hervor. Zu dieser Aussage über den Einfluß von FSI kommen in detaillierterer Rechnung auch [Pik 71 bzw. Era 73].

Das bedeutet, daß 75 % der Neutronen nicht direkt emittiert werden, sondern durch Reabsorption in andere Kanäle streuen. Das hat die Anregung komplizierterer Konfigurationen von $^{16}\text{N}^*$ zur Folge, was bevorzugt zum Abdampfen mehrerer niederenergetischer Nukleonen führt.

Der geringe Beitrag der 1s-Protonen zur totalen Übergangsrate begründet sich in der nur zweifachen Besetzung dieses Niveaus und der starken Bindung von etwa 40 MeV, was eine starke Einschränkung des Phasenraumvolumens bedingt. Das Phasenraumargument liefert auch die Begründung dafür, daß der $1p_{1/2}$ -Zustand nur unwesentlich geringer beiträgt als der doppelt so hoch entartete $1p_{3/2}$ -Zustand des ^{16}O -Ausgangskerns.

VII.1.4 Zusammenfassung

Als Resultat der Rechnungen halten wir fest:

1. Final state interaction verringert die Emissionsraten direkter Neutronen um etwa 75 % und stellt für eine realistische Berechnung der partiellen und totalen Übergangsraten sowie des mittleren Teils des Spektrum die wesentliche Ergänzung zum Einteilchenschalenmodell dar.
2. In diesem Teil des Spektrums führen SRC - ebenso wie die Endzustandswechselwirkung - zu einer Verminderung der Übergangswahrscheinlichkeit. Allerdings ist festzuhalten, daß die Endzustandswechselwirkung vor allem das Niederenergiespektrum, die SRC dagegen das Spektrum der schnellen Neutronen stark beeinflussen.
3. Eine Anhebung der Übergangswahrscheinlichkeit wird durch die SRC erst im Bereich "sehr schneller" Neutronen (d.h. für $T_n > 40$ MeV) erzielt. In diesem Bereich beträgt die Anhebung der Übergangswahrscheinlichkeit etwa eine Größenordnung gegenüber dem Schalenmodellwert. Wegen der ungünstigen Phasenraumverhältnisse in diesem Bereich sind SRC jedoch für die totale Emissionsrate direkter Neutronen praktisch bedeutungslos.

2. Spektren von Protonen nach μ -Absorption

Das Protonenspektrum ist durch den allgemeinen Ausdruck (2.11) gegeben. Protonemission nach μ -Absorption läßt jedoch sich nach den Ausführungen von Kap. II und Kap. V im IPM im Bilde des T -Rescattering erklären.

Im Gegensatz zur Neutronemission ist Protonemission nur über einen Zweiteilchenoperator möglich.

Bei relativ niedrigen Emissionsimpulsen besteht der wesentliche Mechanismus im Ein-Pion-Austausch.

Darüberhinaus verläuft diese Reaktion wie auch die Neutronemission über SRC.

Protonemission via SRC erzeugt eine ähnliche spektrale Gestalt wie der SRC-Beitrag bei Neutronemission (siehe Fig. 7.1 und Fig. 7.2). Ein Vergleich mit dem Verlauf des Matrixelementes bei Protonemission (siehe Fig. 7.8 und Fig. 7.9) macht jedoch ersichtlich, daß erst ab Impulsen von der Größenordnung des Korrelationsimpulses (also erst ab circa 300 MeV/c, was Protoneneenergien von 50 MeV entspricht) SRC einen dem T -Rescattering vergleichbaren Einfluß haben. Da dem Proton wegen der höheren Kernanregung lediglich Energien kleiner als 70 MeV zur Verfügung steht, ist der Phasenraum in diesem Bereich schon sehr stark eingeschnürt.

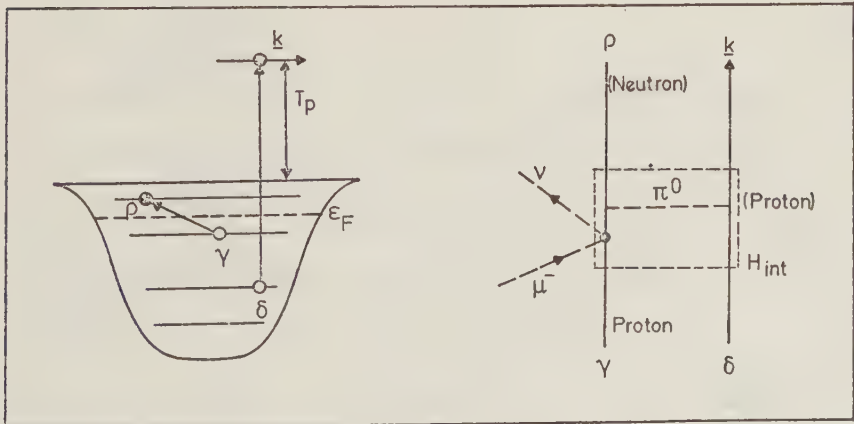
Hierdurch ist die Emission sehr schneller Protonen im Gegensatz zu der schneller Neutronen sehr stark unterdrückt, so daß die protonischen Spektren allein durch die Berücksichtigung des Ein-Pion-Austausches erklärt werden können.

Das mit dem Ein-Pion-Austausch sich ergebende spingemittelte Matrixelement ist in (5.21) gegeben:

$$\begin{aligned}
 |T_{fi}^{(p)}|^2 \text{ spins} &= \frac{3}{16\pi} \left(\frac{G_P \bar{g}_\pi}{2} \right)^2 (\ell_V^2 + 3\ell_A^2) \\
 &\times \sum_{\ell} \left| \frac{I_F J_F \ell}{\sqrt{1+\delta_F \delta}} (\hat{\ell}_F \hat{\ell}_F \hat{\ell}) \begin{pmatrix} j_F I_F J_F \ell \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_F j_F J_F \ell \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0 \end{pmatrix} \right| \\
 &\times \Delta(I_F, \ell, \frac{1}{2}) \Delta^{\theta}(\ell_F, \ell, J_F) \Delta^{\theta}(\ell_F, \ell, J_F \delta) \\
 &\times (R_F j_{\ell}(\ell) | R_F R_{\delta})|^2
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Die Indizes γ, δ, φ beschreiben den ^{15}C -Endzustand, wobei γ, δ zwei protonische Löcher des ^{16}O -Cores, φ den Zustand des oberhalb der Fermikante - also als $2s_{1/2}$ oder $1d_{5/2}$ eingebauten, bei der μ -Absorption erzeugten Neutrons angeben.

Fig. 7.7 Reaktionsmechanismus bei Protonemission



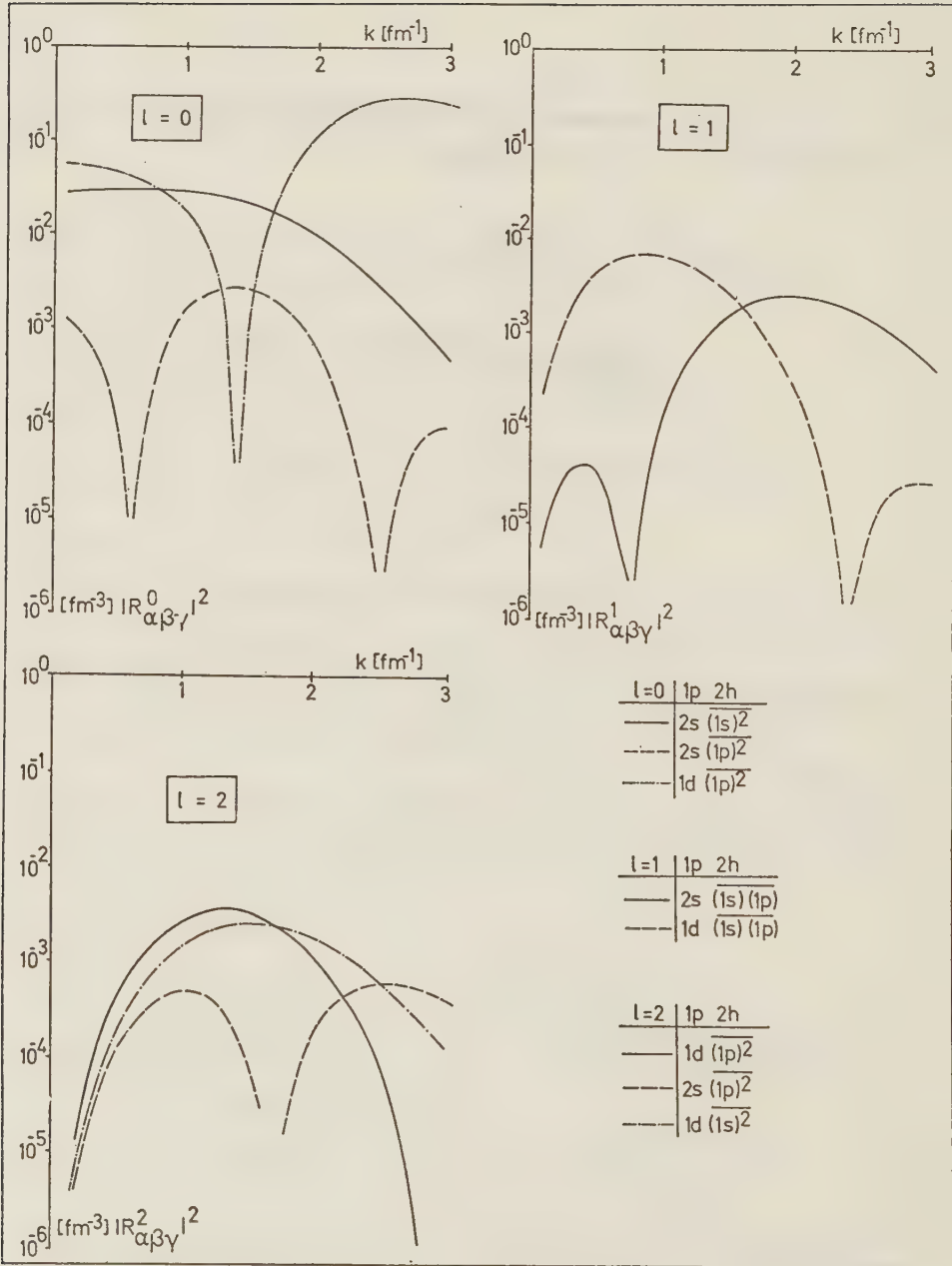


Fig. 7.8 Erklärung siehe Seite 93

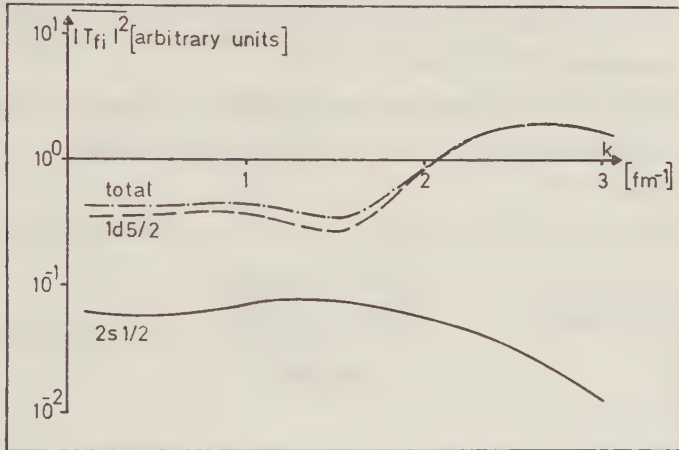
Die Form des Spektrums wird im wesentlichen bestimmt

durch die Funktionen: $(R_{1s} j_1(k) | R_{1s} R_{1s})$

Ihre Betragsquadrate sind in Figur 7.8 über dem Impuls k aufgetragen. Bemerkenswert ist der relativ große Wert dieser Ausdrücke selbst bei Impulsen bis zu 3 fm^{-1} .

Damit muß auch das Übergangsmatrixelement eine entsprechende Impulsstruktur haben. Bei inkohärenter Aufsummation über die Lochniveaus ergeben sich Übergangsmatrixelemente in $2s1/2$ bzw. $1d5/2$ -Teilchenzustände des Endkerns. Diese Matrixelemente sind in Figur 7.9 dargestellt.

Fig. 7.9

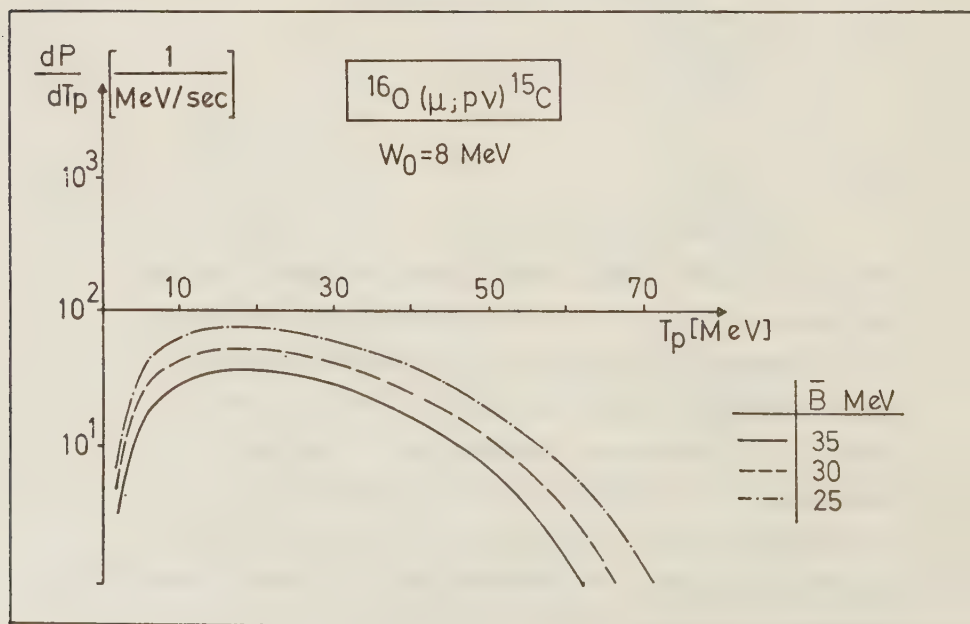


Man sieht an der Graphik, daß die Matrixelemente im gesamten Bereich bis $k = 3 \text{ fm}^{-1}$ um weniger als eine Größenordnung variieren. Über das ganze Impulsspektrum dominiert das $1d5/2$ -Matrixelement mindestens im Verhältnis der Entartung des $5/2$ -Zustandes gegenüber dem $1/2$ -Zustand. Die Bevorzugung hoher Impulse des $1d5/2$ - gegenüber dem $1s1/2$ -Matrixelement erklärt sich aus der Impulsverteilung des $1d5/2$ -Zustandes. Das Anwachsen des $1d5/2$ -Matrixelementes zu hohen Impulsen ($2 - 3 \text{ fm}^{-1}$) ist vor allem auf die Beiträge von $(R_{1d} j_1(k) | R_{1s} R_{1p})$ und $(R_{1d} j_0(k) | R_{1p}^2)$ zurückzu-

Das Protonenspektrum wurde ohne Spezifikation der Endkernanregung berechnet. Aus diesem Grunde mußte über sämtliche möglichen Anregungszustände summiert und in den kinematischen Größen vereinfachend eine mittlere Endkernanregungsenergie $\bar{B}$ eingeführt werden. Aus dem Verhältnis der partiellen Übergangsraten bei Neutronemission konnte wir entnehmen, daß die stark gebundenen 1s-Protonen eine untergeordnete Rolle für die Emission spielen. Wir setzen daher die mittlere Anregungsenergie auf einen Wert wenig oberhalb der experimentell gefundenen Schwelle für Protonenemission: $\bar{B} \approx 25$ MeV.

Fig. 7.10 gibt das Protonenspektrum bei Variation der Anregungsenergie $\bar{B}$ um ihren mittleren Wert an:

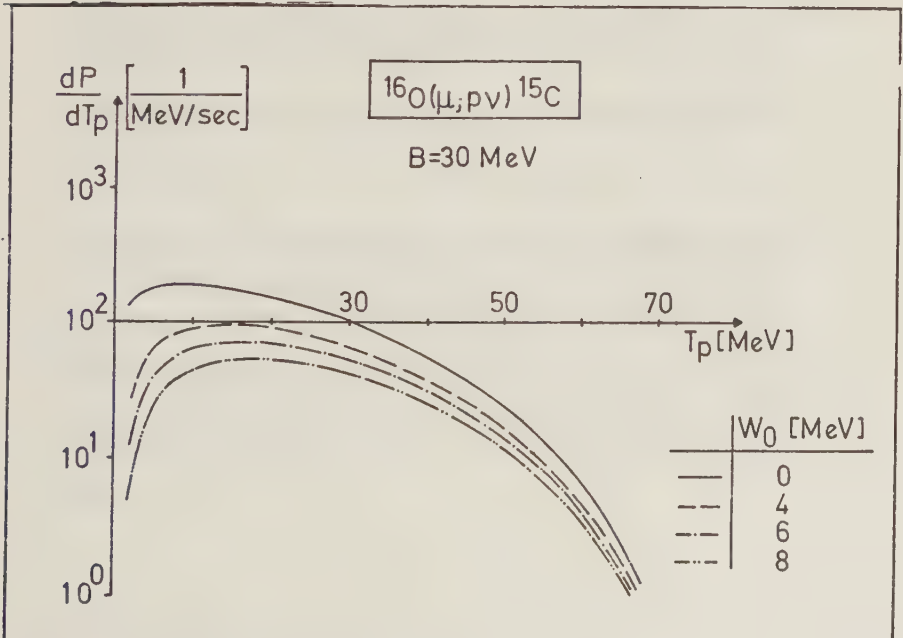
Fig. 7.10



Der hier verwendete Ein-Pion-Austausch beschreibt im Gegensatz zu den SRC keine Eigenschaft des ^{16}O -Kerns, sondern einen durch die Dynamik des Problems gegebenen Reaktionsmechanismus. Daher können wir annehmen, daß der Wechselwirkungsoperator einen Teil der Endzustandswechselwirkung - allerdings nicht im Sinne eines optischen Potentials - enthält. Reabsorption des Protons allerdings beschreibt er nicht. Wir sind also berechtigt, diesen Prozeß separat durch Eikonalisierung der auslaufenden Protonenwelle zu berücksichtigen.

Figur 7.11 beinhaltet das Protonenspektrum für verschieden starke absorptive optische Potentiale nach Gleich. (7.8):

Fig. 7.11



Als Hauptmerkmal der berechneten Spektren stellen wir den im Matricelement (Fig. 7,8) bereits sich andeutenden flachen Abfall zu hohen Impulsen von circa einer Größenordnung über einen Bereich von 40 MeV fest.

Die sich aus den Spektren ergebenden Übergangsraten sind in Tabelle 2 für die verschiedenen verwendeten Parameter angegeben:

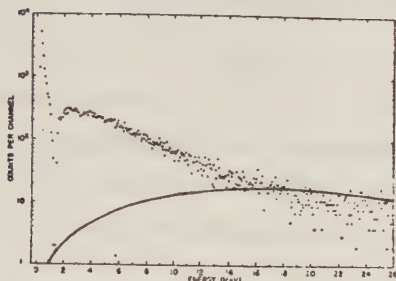
Tabelle 2: totale Emissionsraten direkter Protonen

$\bar{B}$ [MeV]	w_o [MeV]	0	6	8
25		8.9×10^3	3.6×10^3	2.7×10^3
30		5.9×10^3	2.4×10^3	1.8×10^3
35		3.9×10^3	1.6×10^3	1.2×10^3

Wir finden etwa 2 bis 3 % direkt emittierter Protonen auf jedes an ^{16}O absorbierte Myon.

Ein Vergleich mit den Meßergebnissen von Sobottka für μ -Absorption an ^{28}Si [Sob 68] zeigt nach Anpassung des Maximums des gerechneten Spektrums von ^{16}O an das Spektrum für Protonen aus ^{28}Si Abweichung im niederenergetischen Teil und parallelen Verlauf bei höheren Energien ab etwa 20 MeV.

Fig. 7.12



Direktes Protonenspektrum von ^{16}O (durchgezogene Kurve) angepaßt an das experimentelle Protonenspektrum von ^{28}Si

Danach kann man das Protonenspektrum ähnlich dem Neutronenspektrum einteilen in einen hochenergetischen Teil "quasidirekter" Protonen über den instantanen Ein-Pion-Austausch und einen niederenergetischen Anteil, für den Protonen aus dem Verdampfungsspektrum maßgeblich sind.

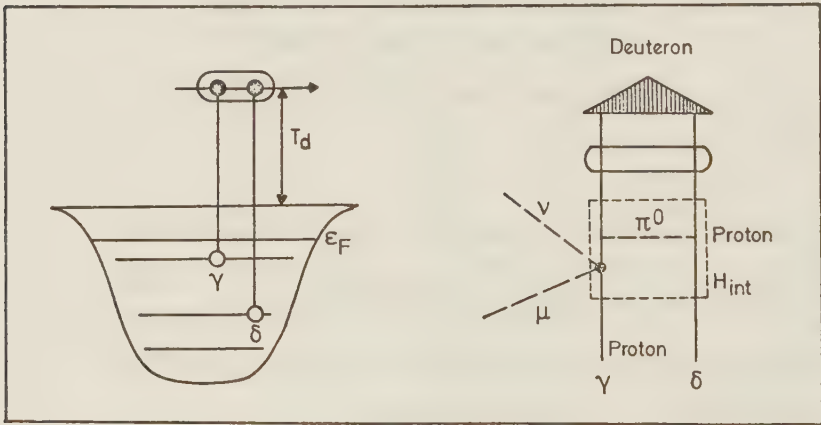
Die Diskrepanz in den totalen Emissionsraten für Protonen - 3 % Protonen pro absorbiertem Myon nach unseren Rechnungen an ^{16}O gegen 15 % bei Sobottkas Messungen an ^{28}Si - ist also darauf zurückzuführen, daß wir im wesentlichen das Spektrum schneller Protonen erfassen.

Wir stellen fest, daß die Emission direkter Protonen nach μ -Absorption ganz wesentlich vom Ein-Pion-Austausch bestimmt wird.

Spektren von Deuteronen nach Λ -Absorption

Das Deuteronspektrum wird durch den allgemeinen Ausdruck (2.11) gegeben. Als Zweinukleonenwechselwirkung nehmen wir wieder den Ein-Pion-Austausch an. Danach hat die Reaktion die in Figur 7.13 angegebene Struktur.

Fig. 7.13: Reaktionsmechanismus bei Deuteronemission



Der analog dem Protonemissionsoperator konstruierte Wechselwirkungsoperator (4.27) führt auf das spingemittelte Übergangsmatrixelement (5.26).

$$\overline{|T_{fi}^{(u)}|^2}^{\text{Spins}} = \frac{1}{2} G_d^2 \sum_{j_d} \left| \frac{\hat{j}_d \hat{j}_x \hat{j}_d \hat{\ell}_x \hat{\ell}_d}{\sqrt{1 + \delta_{x\delta}}} \Delta(j_d, 1, j_{x\delta}) \right. \\ \left. \times \begin{pmatrix} j_{x\delta} & \ell_x & \ell_d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_x & \ell_x & \nu_2 \\ \ell_d & j_\delta & j_{x\delta} \end{Bmatrix} (j_{j_{x\delta}}(k) | R_\delta R_\delta) \right|^2 \quad (7.10)$$

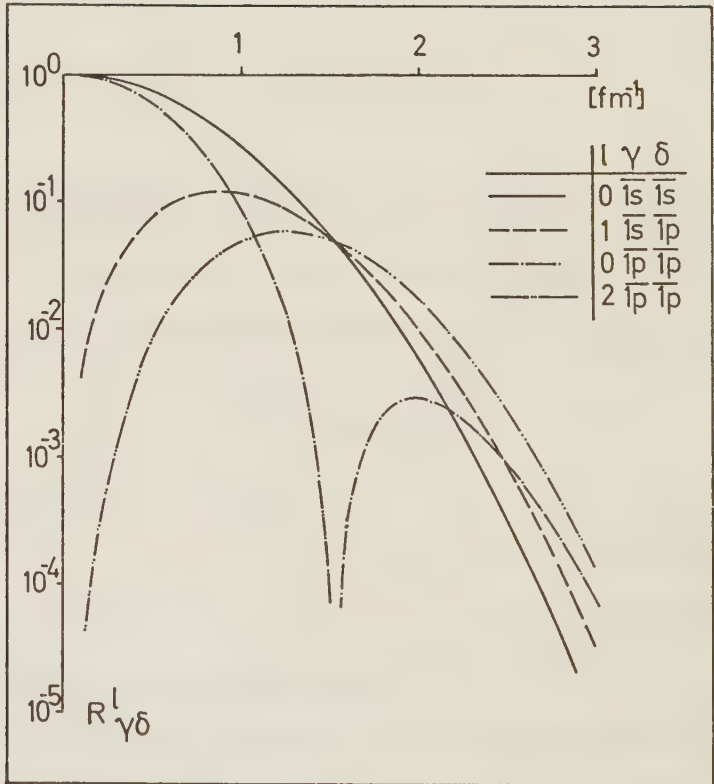
Da wir nur an Spektren ohne Spezifikation des Endkerns interessiert sind, bilden wir durch inkohärente Summation über die Endkernzustände das totale Matricelement:

$$|T^{(u)}(k)|^2 = \frac{1}{2} G_d^2 \left\{ \frac{1}{2} |\langle j_0(k) | R_{13}^2 \rangle|^2 + \frac{g}{2} |\langle j_0(k) | R_{1p}^2 \rangle|^2 \right. \\ \left. + 3 |\langle j_1(k) | R_{15} R_{1p} \rangle|^2 \right. \\ \left. + 6 |\langle j_2(k) | R_{1p}^2 \rangle|^2 \right\} \quad (7.11)$$

Das Matricelement wird in seiner Dynamik bestimmt durch die Funktionen: $(j_1(k) | R_\delta R_\delta)$

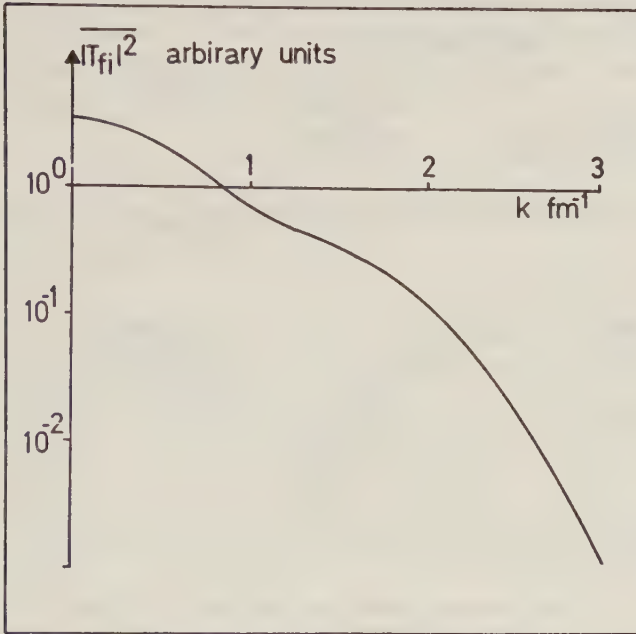
Ihre Betragsquadrate sind in Figur 7.14 bei Verwendung von Oszillatorwellen dargestellt. Die Abnahme der Funktionswerte mit dem Impuls liegt zwischen der der Einteilchenwellenfunktionen und der der zugehörigen Funktionen bei Protonemission. Dies entspricht dem Bild der Gleichverteilung des Emissionsimpulses auf eine, bei Deuteronemission zwei und bei Protonemission drei gebundene Wellenfunktionen

Fig. 7.14



Betragsquadrate der Matrixelemente $(j_1(k) | R_{\gamma} R_{\delta})$
in Oszillatorbasis

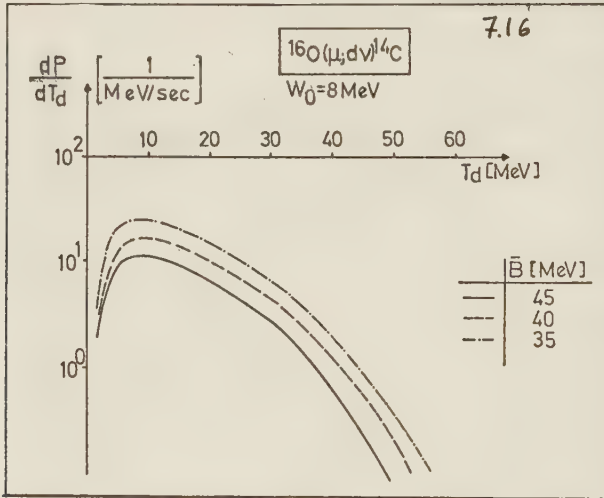
Fig. 7.15: Übergangsmatrixelement für Deuteronemission



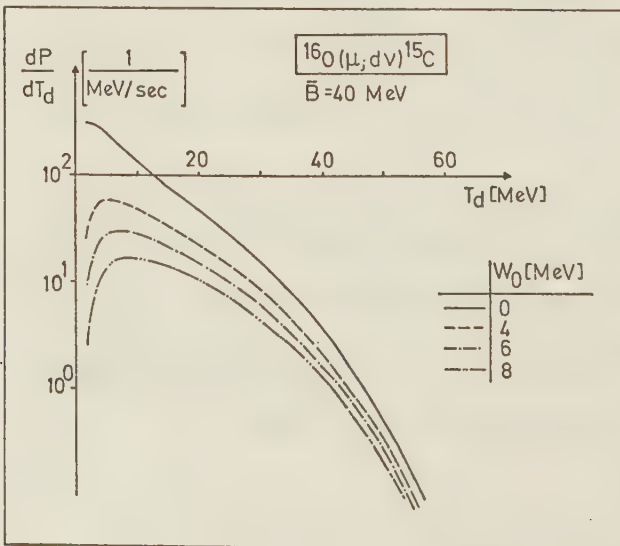
In Figur 7.15 ist das totale Übergangsmatrixelement in seiner Impulsabhängigkeit gegeben. Dieses Matrixelement hat seine Hauptbeiträge für kleine Impulse und fällt im Bereich von $0-2 \text{ Fm}^{-1}$ relativ gleichmäßig um zwei Größenordnungen.

Um das Deuteronenspektrum berechnen zu können, braucht man die mittlere Bindungsenergie zweier Teilchen im IPM. Wir wählen die aus einem Oszillatormodell mit LS-Kopplung sich ergebenden mittleren Werte $B = 35, 40, 45 \text{ MeV}$. Wegen der hohen Gewichtung der $1p$ -Nukleonen erwartet man für $\bar{B}$ als realistischen Wert etwa 40 MeV .

Figur 7.16 zeigt das Deuteronspektrum bei einer Variation der mittleren Anregungsenergie $\bar{B}$.



In Figur 7.17 schließlich geben wir das Spektrum unter Änderung des absorptiven Potentialbeitrags der Endzustandswechselwirkung.



Man stellt fest: Vergrößerung von B schnürt das Spektrum ein (Phasenraum). Vergrößerung von W_0 flacht das Spektrum zu kleinen Impulsen hin ab und verringert so den Wert für die Deuteronemissionsrate

Tabelle 3: Totale Deuteronemissionsrate bei Parametervariation

B [MeV]	W [MeV]	0	\ 4	6	8
	$P_d [\frac{1}{sec}]$				
45		2.25×10^3	6.55×10^2	3.8×10^2	2.3×10^2
40		3.3×10^3	9.72×10^2	5.72×10^2	3.49×10^2
35		4.89×10^3	1.44×10^3	8.48×10^2	5.19×10^2

VIII. Zusammenfassung

Die Betrachtung einfacher Reaktionsmodelle (IPM mit PWBA bzw. DWBA; IPM mit SRC und IPM mit Ein-Pion-Austausch) für die Emission schneller Neutronen, Protonen und Deuteronen ermöglicht einen Einblick in Reaktionsmechanismus und Kernstruktur bei Energieüberträgen von 0 bis 100 MeV.

Das Niederenergiespektrum bis 15 MeV wird durch Verdampfung und hochangeregte, quasigebundene Zwischenzustände erzeugt. Das sich anschließende bis etwa 80 MeV erstreckende, relativ glatte direkte Spektrum läßt sich bis 50 MeV durch Berücksichtigung der langreichweitigen Phänomene der Kernstruktur und der Distorsion und Reabsorption des emittierten Nukleons beschreiben. Die Beschreibung des auslaufenden Nukleons mit DWBA hat eine Verringerung der totalen Emissionsrate um etwa 75% zur Folge.

Für sehr schnelle Neutronen (50 bis 80 MeV) werden SRC dominant. Sie vergrößern in diesem Bereich die Emissionswahrscheinlichkeit bis zu einer Größenordnung.

Ober diesen Bereich liegen zur Zeit leider noch keine experimentellen Ergebnisse vor.

Die sich bis 70 bzw. 60 MeV erstreckenden direkten Spektren von Protonen bzw. Deuteronen können konsistent im Bilde des Ein-Pion-Austausches erklärt werden.

Man findet für ^{16}O etwa 3% Protonen und etwa 0.3% Deuteronen pro absorbiertem Myon im gesamten Spektrum.

Anhang 1

Definitionen, Konventionen und Gleichungen aus der relativistischen Quantenmechanik

1. γ -Matrizen

1.1 Definitionen:

$$\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (A1.1)$$

(Definiert die Algebra der γ)

$$\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \quad (A1.2)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta] \quad (A1.3)$$

1.2 Darstellung:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (A1.4)$$

Bezeichnung:

$$\vec{\gamma} = \gamma^n; \quad n = 1, 2, 3$$

$\sigma^{\alpha\beta}$ sind die Pauli-Spin-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A1.5)$$

Die Pauli-Matrizen erfüllen:

$$[\sigma^j, \sigma^k] = i\epsilon_{jkl} \sigma^l \quad (A1.6a)$$

$$\{\sigma^j, \sigma^k\} = 2\delta_{jk} \quad (A1.6b)$$

Wegen der Metrik
gilt

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A1.7)$$

$$\gamma^0 = \gamma_0; \quad \gamma^n = -\gamma_n; \quad \gamma^5 = -\gamma_5$$

1.3 Eigenschaften

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \quad (A1.8)$$

$$\vec{\gamma} = \gamma^0 \gamma^5 \vec{\sigma} \quad (A1.9)$$

$$\sigma^{\alpha\beta} = \begin{cases} \sigma^{en} = -\sigma^{ne} = i\gamma^5 \sigma^n \\ \sigma^{mn} = \epsilon_{mnl} \sigma^l \end{cases} \quad (A1.10)$$

2. Spinoren

Definition:

Die vier unabhängigen Lösungen der Diracgleichung

$$(\not{p} - m) \psi = 0 \quad (A1.11)$$

lassen sich wie folgt darstellen:

$$\psi_r = \begin{cases} u_+^{(r)}(p) e^{ipx} \\ u_-^{(r)}(-p) e^{-ipx} \end{cases} \quad (A1.12)$$

$u_+(p)$ gehört zu den Teilchen, deren Bewegung in Richtung p
 $u_-(-p)$ zu den Antiteilchen, deren Bewegung in Richtung p
 verläuft.

Darstellung:

$$u_+^{(r)} = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \begin{pmatrix} \xi^{(r)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+M} \xi^{(r)} \end{pmatrix} \quad (A1.13)$$

$$u_-^{(r)} = \sqrt{\frac{E+M}{2M}} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+M} \xi^{(r)} \\ \xi^{(r)} \end{pmatrix}$$

mit den Spinoren

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

$$u^\dagger u = \frac{E}{M} \quad (A1.14)$$

$$\bar{u}^{(r)} u^{(r')} = \delta_{rr'} \quad (A1.15)$$

$$\bar{u}_+^{(r)} u_-^{(r')} = \bar{u}_-^{(r)} u_+^{(r')} = 0 \quad (A1.16)$$

3. Lösungen zur Dirac-Gleichung des Neutrinos

Das Neutrino erfüllt die massefreie Dirac-Gleichung

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi(x) = 0 \quad (A1.17)$$

γ^5 vertauscht mit der Diracgleichung des Neutrinos.

D. h. γ^5 ist Erhaltungsgröße.

Die Projektoren

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \\ P_R &= \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) \end{aligned} \quad (A1.18)$$

erzeugen die Eigenfunktionen

$$\begin{aligned} \psi_L &= P_L \psi \\ \psi_R &= P_R \psi \end{aligned} \quad (A1.19)$$

zu γ^5

Es gilt

$$\begin{aligned} \gamma^5 \psi_L &= -\psi_L \\ \gamma^5 \psi_R &= \psi_R \end{aligned} \quad (A1.20)$$

und daher existiert die Darstellung

$$\begin{aligned}\psi_L &= \begin{pmatrix} \varphi_L \\ -\varphi_L \end{pmatrix} \\ \psi_R &= \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_R \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{A1.21}$$

In dieser Darstellung zerfällt die 4-komponentige Diracgleichung (17) in je zwei identische Gleichungen für φ_L und φ_R .

$$\begin{aligned}E\varphi_L &= -\vec{\sigma}\vec{p}\varphi_L \\ E\varphi_R &= \vec{\sigma}\vec{p}\varphi_R\end{aligned}\tag{A1.22}$$

Wegen der kinematischen Beziehung $\vec{p} = E\hat{p}$ für masselose Partikel ist dies

$$\begin{aligned}\varphi_L &= -\vec{\sigma}\hat{p}\varphi_L \\ \varphi_R &= \vec{\sigma}\hat{p}\varphi_R\end{aligned}\tag{A1.23}$$

Dies sind aber gerade die Eigenwertgleichungen für die Helizität. Man liest aus (23) ab, daß für φ_L Bewegungsrichtung und Spin entgegengesetzt für φ_R dagegen parallel sind. Für Neutrinos ist die Lösung φ_L realisiert.

Aus den allgemeinen Spinoreigenschaften (A1.13) folgt, daß das Antineutrino entgegengesetzt dem Neutrino polarisiert ist. Beim Antineutrino ist der Spin in Bewegungsrichtung orientiert.

Anhang 2:

Foldy-Wouthuysen-Transformation

1. Verfahren und Ziel

Der in III.1 angegebene Operator der schwachen Wechselwirkung wirkt auf 4-dimensionale Spinordarstellungen $\begin{pmatrix} u_I \\ u_{II} \end{pmatrix}$ der Felder der untereinander wechselwirkenden Fermionen, in denen Teilchen - (u_I) und Antiteilchen-Anteile (u_{II}) enthalten sind. In der nicht-relativistischen Quantenmechanik kommen keine Antiteilchen mehr vor; somit kann man sich auf zweidimensionale Spinfunktionen beschränken. Um die Wechselwirkung, die relativistisch durch eine 4×4 -Matrix dargestellt wird, im Raum der 2-komponentigen Wellenfunktionen zu erfassen, führt man eine unitäre Transformation

$$\psi \longrightarrow \psi' = U\psi \approx \begin{pmatrix} u_I' \\ 0 \end{pmatrix} \quad (A2.1)$$

durch, so daß die 4-dimensionalen Spinoren möglichst kleine Antiteilchenanteile u_{II}' haben. Da die Antiteilchenanteile proportional zu $\left| \frac{p}{M} \right|$ sind, ist die Foldy-Wouthuysen-Transformation eine Funktion von $\left| \frac{p}{M} \right|$. Da wir $\left| \frac{p}{M} \right| < 1$ voraussetzen, kann diese Größe als Entwicklungsparameter von aufgefaßt werden.

$$U = e^S = [1 + S + \dots] \quad (A2.2)$$

U bzw. S sind dann dadurch bestimmt, daß entsprechend der Ordnung der Entwicklung

$$H = \begin{pmatrix} H_I & H_{I2} \\ H_{I2}^+ & H_{II} \end{pmatrix} \longrightarrow H' = U H U^{-1} = \begin{pmatrix} H_I & 0 \\ 0 & H_{II} \end{pmatrix} \quad (A2.3)$$

keine Komponenten von Teilchen- und Antiteilchen mehr mischt.

2. Bedingungen für S

Um die Matrix S in erster Ordnung zu berechnen, zerlegen wir die Hamilton-Matrix des gesamten Problems, bestehend aus freiem Dirac-Feld und Wechselwirkung der Nukleonen mit den Leptonen in gerade (diagonale) Anteile H^g und ungerade Anteile H^u bezüglich Teilchen-Antiteilchenkomponenten.

$$H = H^g + H^u \quad (A2.4)$$

Für U gilt $U = e^S$, wobei S, um H zu diagonalisieren, einer infinitesimalen Drehung im Teilchen-Antiteilchen entsprechen muß. Das bedeutet, daß S selbst ungerade ist.

$$S = S^u \quad (A2.5)$$

Damit bekommt man

$$\begin{aligned} H' = e^{-S} H e^S = & H^g + [H^u, S] + \frac{1}{2} [[H^g, S], S] + \frac{1}{3!} [[[H^u, S], S], S] \\ & + H^u + [H^g, S] + \frac{1}{2} [[H^u, S], S] + \frac{1}{3!} [[[H^g, S], S], S] \end{aligned} \quad (A2.6)$$

Um die ungeraden Anteile in den Termen 1. Ordnung in H' zum Verschwinden zu bringen, muß S die Bedingung

$$H^u + [H^g, S] = 0 \quad (A2.7)$$

erfüllen.

Dies ist die gesuchte, eindeutige Beziehung für S .

In H' eingesetzt ergibt sich:

$$H' = H^g + \frac{1}{2} [H^u, S] + O\left(\left(\frac{H^u}{M}\right)^3\right) \quad (A2.8)$$

3. Anwendung auf die schwache Wechselwirkung

Zur Durchführung der Foldy-Wouthuysen-Transformation geben wir zuerst den zu transformierenden Hamiltonoperator an. Er besteht aus dem relativistischen Nukleonenhamiltonian und dem Operator der schwachen Wechselwirkung.

$$H = H_N + H_W \quad (A2.9)$$

wobei
$$H_N = \gamma^0 M + \vec{\sigma} \vec{p} \gamma^5$$

die freie Dirac-Gleichung in Hamiltonscher-Form ist. An dieser Stelle der Diskussion verliert man eine weitere Behandlung der starken Wechselwirkung. Diese wird in der üblichen Weise für das Nukleonensystem separat behandelt.

Der Operator (A2.9) reduziert sich auf einen reinen Nukleonenoperator, wenn man den Leptonen-Strom für μ -Absorption ausrechnet. Das Matrixelement des leptonischen Stromes läßt sich exakt angeben, da $|k_\mu|/m_\mu = 0$ und das Neutrino ein exakt relativistisches Teilchen darstellt

$$\begin{aligned} l_0 &= (1 - \vec{\sigma}_e \hat{v}) \\ \vec{l} &= -l_0 \vec{\sigma}_e \end{aligned} \quad (A2.10)$$

Zur Durchführung der Transformation muß H in (A2.9) in einen geraden und einen ungeraden Anteil zerlegt werden. Dies führt auf:

$$H^q = (\gamma^0 M + H_W^q) \quad (A2.11)$$

mit

$$\begin{aligned} H_W^q &= \frac{G}{\sqrt{2}} (\epsilon_W^{(1)} + \epsilon_W^{(2)} \gamma^0) \\ \epsilon_W^{(1)} &= l_0 f_V \\ \epsilon_W^{(2)} &= l_0 [f_A \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_e + i f_W (\vec{q} \times \vec{\sigma}_N) \vec{\sigma}_e] \end{aligned}$$

und

$$H^u = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \gamma^5 + H_W^u) \quad (A2.12)$$

mit

$$\begin{aligned} H_W^u &= \frac{G}{\sqrt{2}} (O_W^{(1)} + O_W^{(2)} \gamma^0) \gamma^5 \\ O_W^{(1)} &= l_0 (f_A + f_V \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_e) \\ O_W^{(2)} &= -l_0 (f_W \vec{\sigma}_N \vec{q} + f_P q_0 - f_W q_0 \vec{\sigma}_N \vec{\sigma}_e - f_P \vec{q} \vec{\sigma}_e) \end{aligned}$$

Aus (A2.11) und (A2.12) läßt sich gemäß (A2.7) die Transformationsmatrix S und nach Gleichung (A2.8) der relativistisch korrigierte Operator H' berechnen.

Dies führt für S auf:

$$S = \frac{\gamma^0}{2M} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \gamma^5 + H_W^A) \quad (A2.13)$$

und für H' auf:

$$H' = \gamma^0 M + H_W^g + \frac{1}{2} [\gamma^5 \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + H_W^A S] \quad (A2.14)$$

Aus (A2.14) rechnet man H_N^i und H_W^i aus.

Für H_W^i erhält man:

$$H_W^i = H_W^{(0)} + H_W^{(1)} \quad (A2.15)$$

$$H_W^{(0)} = \frac{G}{\sqrt{2}} l_0 [f_V + f_A \vec{\sigma}_N \cdot \vec{e}_2 + i f_W (\vec{q} \times \vec{\sigma}_N) \cdot \vec{e}_2]$$

$$H_W^{(1)} = \frac{G}{\sqrt{2}} l_0 \frac{1}{2M} \{ \vec{\sigma}_N \cdot \vec{p}, (f_A + f_V \vec{\sigma}_N \cdot \vec{e}_2) \} \\ - [\vec{\sigma}_N \cdot \vec{p}, (f_W (\vec{q} - q_0 \vec{e}_2) \cdot \vec{\sigma}_N + f_P (q_0 - \vec{q} \cdot \vec{e}_2))] \}$$

Anhang 3

Closure für den Streuoperator (4.13)

Der in Kapitel IV gegebene Streuoperator wird dort durch Closure vereinfacht.

Im folgenden Anhang soll eine Begründung für die dort gewählte Energie des Zwischenzustandes gegeben werden. Eine Abschätzung der Zwischenzustandsenergie wird dann einfach, wenn die möglichen Übergänge sich auf einen oder wenige benachbarte Zustände des Spektrums beschränken. Durch eine Zerlegung des Spektrums in gebundene und freie Zustände wird uns eine Abschätzung möglich, die diese Beschränkung ermöglicht. Um die Rechnung zu vereinfachen und da wir lediglich an hochenergetischen Nukleonen interessiert sind, werden wir mit dem Limit

$$E_{\nu} \rightarrow 0 \quad (A3.1)$$

arbeiten.

Das Spektrum der Zwischenzustände zerfällt in einen gebundenen und einen Kontinuumsanteil:

$$1 = \sum_n |n\rangle \langle n| + \int d^3k |k\rangle \langle k| \quad (A3.2)$$

Durch Einschub des vollständigen Funktionensystems kommt man auf:

$$\langle f | \frac{V_a H_w}{E_0 - H_0} | i \rangle = \sum_n \frac{\langle f | V_a | n \rangle \langle n | H_w | i \rangle}{m_{\mu} + E_0 - E_n} + P \int d^3k \quad (A3.3)$$

$$\langle f | \frac{V_q H_w}{E_0 - H_0} | i \rangle = \sum_n \frac{\langle f | V_q | n \rangle \langle n | H_w | i \rangle}{m_\mu + E_0 - E_n} + \mathcal{P} \int d^3 k \frac{\langle f | V_q | k \rangle \langle k | H_w | i \rangle}{m_\mu + E_0 - k^2/2M} + i\pi \{ \text{Residuen des Kontinuumsintegrals} \}$$

Wir behaupten nun, daß der Kontinuumsanteil in (A3.3) im Vergleich zum Beitrag aus dem gebundenen Spektrum eine untergeordnete Rolle spielt.

Dies ist gezeigt, wenn sich sowohl

$$V_H := \frac{\mathcal{P} \int d^3 k \frac{\langle k | H_w | i \rangle}{m_\mu + E_0 - k^2/2M}}{\sum_n \frac{\langle n | H_w | i \rangle}{m_\mu + E_0 - E_n}} \quad (\text{A3.4})$$

als auch

$$V_R := \frac{\langle f | V_q | k \rangle}{\langle f | V_q | n \rangle} \quad (\text{A3.5})$$

als klein gegen 1 erweisen.

Der Imaginärteil des Streuoperators (A3.3) wird als Beitrag zum optischen Potential identifiziert.

Wir betrachten zuerst v_H :

Nach Gl. (1.4) ist $\langle k | H_w | 1 \rangle \sim \psi_1(k)$

Entsprechend gilt $\langle n | H_w | 1 \rangle \sim \delta_{n,1}$,

wobei sich das Kronecker-Delta lediglich auf Hauptquantenzahl und Bahndrehimpuls bezieht.

Für das Kontinuumsmatrixelement erhält man somit:

$$M_k := \mathcal{P} \int d^3 k \frac{\langle k | H_w | i \rangle}{m_\mu + E_0 - k^2/2M} \sim \mathcal{P} \int d^3 k \frac{\psi(k)}{m_\mu + E_0 - k^2/2M} \quad (\text{A3.6})$$

Da wir Kopplungskonstante und μ -Wellenfunktion in (A3.4) konsistent weglassen, führt dies mit Oszillatorwellenfunktionen $R_1 = N_1 e^{-a^2/1}$ für die Nukleonen (für eine Abschätzung genügt Beschränkung auf s-Nukleonen) auf:

$$M_k \sim 2M\sqrt{4\pi} N_i \left\{ P \int dk \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} e^{-\frac{a^2 k^2}{2}} \right\} \quad (\text{A3.7})$$

mit $k_0^2 = 2M(w_\mu + \epsilon_0)$

Für das Matrixelement des diskreten Spektrums ergibt sich:

$$M_G = \sum_n \frac{\langle n | H_w | i \rangle}{m_\mu + \epsilon_0} \sim \frac{1}{m_\mu + \epsilon_0} \quad (\text{A3.8})$$

Damit kann man v_H angeben:

$$v_H = \frac{2M\sqrt{4\pi}}{k^2} N_i(m_\mu + \epsilon_0) \left\{ P \int dk \frac{k^2}{k_0^2 - k^2} e^{-\frac{(ak)^2}{2}} \right\} \quad (\text{A3.9})$$

Das Hauptwertintegral läßt sich numerisch auswerten:

$$v_H = -0,5 \quad (\text{A3.10})$$

Die Vernachlässigung des Kontinuumsbeitrages wird nun gerechtfertigt, wenn es gelingt zu zeigen:

$$v_R := \frac{\langle f | V_q | k \rangle}{\langle f | V_q | n \rangle} \ll 1 \quad (\text{A3.11})$$

Zur Abkürzung führen wir die folgende Schreibweise ein:

$$I_K := \langle f | V_q | k \rangle = \langle n_3 k_f | V_q | k_2 n_2 \rangle \quad (A3.12)$$

$$I_G := \langle f | V_q | n \rangle = \langle n_3 k_f | V_q | n_1 n_2 \rangle$$

Nach Weglassen identischer Vorfaktoren in beiden Ausdrücken führt das zu:

$$I_K \sim J_K = \int d^3 k \psi_{n_3}^*(k-q) \frac{q^2}{q^2+m^2} \psi_{n_2}(k_f-q) \quad (A3.13)$$

$$I_G \sim J_G = \int d^3 k \int d^3 q \psi_{n_3}^*(k-q) \frac{q^2}{q^2+m^2} \psi_{n_2}(k_f-q) \psi_n(k)$$

Wir schätzen diese Integrale wieder für s-Wellen ab.

in J_K ergibt sich damit:

$$J_K = N_3 N_2 \frac{1}{4\pi} \int d^3 q \frac{q^2}{q^2+m^2} e^{-\alpha |k_z - q|^2} \frac{q^2}{q^2+m^2} e^{-\alpha |k_f - q|^2} \quad (A3.14)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{a^2}{2}$$

Da das hierzu gehörende Matricelement von H_W nur in der Nähe von $k_z = k_f$ von null verschwindende Beiträge liefert, ist es gerechtfertigt, zur Abschätzung von (A3.14)

$k_z = k_f$ einzusetzen. Damit wird die Winkelintegration über $d^2 q$ trivial.

$$J_K \approx \frac{N_3 N_2}{4\pi} e^{-2\alpha k_f^2} \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{q^2+m^2} e^{-2\alpha q^2} \sinh(4\alpha k_f q) \quad (A3.15)$$

Unter der Annahme, daß der Impuls des Nukleons im Zwischenzustand die Richtung des emittierten Nukleons hat, läßt sich auch J_G sofort auswerten:

$$J_G \approx \frac{N_3 N_2 N_3}{\sqrt{4\pi} \alpha} \int_0^\infty \frac{k_z^2 dk_z}{k_z + k_f} \int_0^\infty dq \frac{q^3}{q^2 + m^2} e^{-\alpha(2k_z^2 + k_f^2 + 2q^2)} \sinh(2\alpha q(k_z + k_f)) \quad (A3.16)$$

Für eine Abschätzung des Verhältnisses v_R genügt es, die führenden Terme von J_K und J_G zu betrachten. Damit läßt sich v_R angeben. Leichter ist es jedoch, anstelle von v_R das Verhältnis der Integranden in (A3.15) und (A3.16) als Funktion von q zu untersuchen.

Mit den Definitionen:

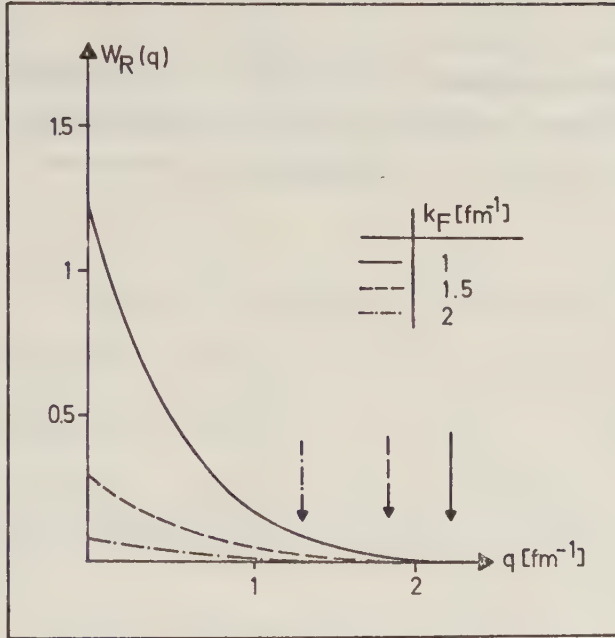
$$J_s := \int dq j_s(q) \quad \text{mit } s = K, G \quad (A3.17)$$

ergibt sich das Verhältnis $w_R(q)$ zu:

$$w_R := \frac{j_K(q)}{j_G(q)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2N_z k_f} e^{-\alpha k_f^2} \left\{ \int dk_z \frac{k_z^2}{k_f + k_z} e^{-(k_z - q)2\alpha k_z} \right\} \quad (A3.18)$$

Wenn $w_R(q)$ über alle q und darüberhinaus im Maximum von j_K wesentlich kleiner als 1 ist, erfüllt auch v_R diese Bedingung.

Figur: A3.1



Die Pfeile geben die Lage der Maxima der $j_K(q)$ an.

Das Ergebnis von (A3.10) und die Abschätzung (A3.18) erlauben die Aussage, daß Kontinuumsübergänge eine nur untergeordnete Rolle spielen.

Damit ist Closure erlaubt. Darüberhinaus hat man eine Festlegung der Closureenergie aus der Bedingung

$\langle n | H_w | 1 \rangle = \delta_{n,1}$. Das Teilchen ändert im Zwischenzustand seine Bindungsenergie nicht. Folglich gilt:

$$\frac{1}{\omega - E_0} \longrightarrow \frac{1}{\omega} ; \quad \omega = m_\mu - E_\nu \quad (\text{A3.19})$$

Nach diesen Ausführungen hat man folgendes Bild für den an die Absorption anschließenden Prozeß.

Das absorbierende Nukleon ändert nach Absorption des μ seine Ortswellenfunktion nicht und bleibt in einem Zustand gleicher Bindungsenergie. Erst der π -Austausch gestattet ihm, seinen Energieüberschuß abzugeben bzw. für eine Emission genügend Energie aufzunehmen.

Anhang 4

Entwicklung einer A-Teilchenwellenfunktion bei abgeschlossenen
Schalen nach Teilchen 1 und 2 in einer drehimpulsgekoppelten
Basis

- 4.1: Zweck des Verfahrens, Entwicklung der A-Teilchendeterminante
- 4.2: Auskopplung eines Teilchens
- 4.3: Auskopplung zweier Teilchen
- 4.4: (A-1)-Teilchenwellenfunktion als Produkt der (A-2)-
Teilchenwellenfunktion mit 1-Teilchenwellenfunktion

1. Zweck des Verfahrens; Entwicklung der A-Teilchendeterminante

Im Rahmen dieser Arbeit sind Matrixelemente von Ein- und Zweiteilchenoperatoren zu berechnen, wobei Übergänge von Kernen mit A-Teilchen und Schalenabschluß (^{16}O) in Systeme mit (A-1) bzw. (A-2) Teilchen betrachtet werden. Diese Übergänge sollen im Formalismus der Drehimpulsalgebra betrachtet werden, da der Drehimpuls eine gute Quantenzahl der Einzelteilchen und des Gesamtsystems darstellt. Gleichzeitig ist zu beachten, daß es sich bei den Nukleonen um ein Fermi-System handelt, dessen Wellenfunktion entsprechend dem Pauli-Prinzip total antisymmetrisch in den Teilchenindizes zu sein hat. Drehimpulskopplung und Antisymmetrisierung sind jedoch nicht unabhängig voneinander, wie man am leichtesten am System zweier $1 \text{ s } 1/2$ Protonen sieht. Nach den Regeln der Drehimpulsalgebra läßt sich $j_1 = 1/2 \quad j_2 = 1/2$ zu $j_1 \otimes j_2 = J_{12} = 0, 1$ koppeln. Antisymmetrisierung verbietet jedoch $J_{12} = 1$.

Wir werden im folgenden unter Umgehung der c.f.p.'s (coefficients of fractional parantage) eine mit der Antisymmetrie der Wellenfunktion verträgliche Entwicklung nach Einteilchen- und Core-Wellenfunktion mit gutem Drehimpuls angeben.

Die A-Teilchenwellenfunktion schreibt sich:

$$\psi^{[0]}_{(1\dots A)} = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(1) \varphi_1(2) \varphi_1(3) \dots \varphi_1(A) \\ \varphi_2(1) \varphi_2(2) \varphi_2(3) \dots \varphi_2(A) \\ \varphi_3(1) \varphi_3(2) \varphi_3(3) \dots \varphi_3(A) \\ \vdots \\ \varphi_A(1) \varphi_A(2) \varphi_A(3) \dots \varphi_A(A) \end{vmatrix} \quad (A4.1)$$

Dabei gibt der tiefgestellte Index k den gesamten Satz der Quantenzahlen an.

Bei den Protonen von ^{16}O läßt sich z. B. folgende Zuordnung treffen:

k	$\{n, \ell, j; u_j\}$
1	1 s $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$
2	1 s $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$
3	1 p $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$
4	1 p $\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$
5	1 p $\frac{3}{2}; \frac{3}{2}$
6	1 p $\frac{3}{2}; \frac{1}{2}$
7	1 p $\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}$
8	1 p $\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}$

(Diese Zuordnung ist willkürlich, wir wollen sie jedoch als fest annehmen und beziehen die Phasenwahl auf sie.)

Die Wellenfunktion ist

- (i) auf 1 normiert
- (ii) wegen Schalenabschluß zu 0 gekoppelt
- (iii) total antisymmetrisch.

Entwicklung der Determinante:

$$\psi^{[0]}(1 \dots A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{k=1}^A (-1)^{1-k} \varphi_k^{(1)} \psi_{\bar{k}}^{(2 \dots A)} \quad (A4.2)$$

Dabei ist:

$$\psi_{\bar{k}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{(A-1)!}} \begin{vmatrix} \cancel{\varphi_1^{(1)}} & \cancel{\varphi_1^{(2)}} & \cancel{\varphi_1^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_1^{(A)}} \\ \cancel{\varphi_2^{(1)}} & \cancel{\varphi_2^{(2)}} & \cancel{\varphi_2^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_2^{(A)}} \\ \cancel{\varphi_3^{(1)}} & \cancel{\varphi_3^{(2)}} & \cancel{\varphi_3^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_3^{(A)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{\varphi_k^{(1)}} & \cancel{\varphi_k^{(2)}} & \cancel{\varphi_k^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_k^{(A)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{\varphi_A^{(1)}} & \cancel{\varphi_A^{(2)}} & \cancel{\varphi_A^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_A^{(A)}} \end{vmatrix}$$

Dabei gibt $\bar{1}$ Fehlen des Teilchens 1 an.

Um nach Teilchen 2 zu entwickeln, verfährt man mit $\bar{k}^{(1)}$ wie in (A4.2) mit der Ausgangswellenfunktion:

$$\psi_{\bar{k}}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{A-1}} \sum_{\ell} (-1)^{1-\ell} \varphi_{\ell}^{(2)} \psi_{\bar{k}\bar{\ell}}^{(1,2)} \quad (A.4.3)$$

Dabei ist

$$\psi_{\bar{k}\bar{\ell}}^{(1,2)} = \frac{1}{\sqrt{(A-2)!}} \begin{vmatrix} \cancel{\varphi_1^{(1)}} & \cancel{\varphi_1^{(2)}} & \cancel{\varphi_1^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_1^{(A)}} \\ \cancel{\varphi_2^{(1)}} & \cancel{\varphi_2^{(2)}} & \cancel{\varphi_2^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_2^{(A)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{\varphi_{\bar{k}}^{(1)}} & \cancel{\varphi_{\bar{k}}^{(2)}} & \cancel{\varphi_{\bar{k}}^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_{\bar{k}}^{(A)}} \\ \cancel{\varphi_{\ell}^{(1)}} & \cancel{\varphi_{\ell}^{(2)}} & \cancel{\varphi_{\ell}^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_{\ell}^{(A)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cancel{\varphi_A^{(1)}} & \cancel{\varphi_A^{(2)}} & \cancel{\varphi_A^{(3)}} & \dots & \cancel{\varphi_A^{(A)}} \end{vmatrix}$$

Mit Hilfe der Entwicklung (A4.3) läßt sich die Ausgangswellenfunktion wie folgt darstellen:

$$\psi^{[0]}(1 \dots A) = \frac{1}{\sqrt{A-1}} \sum_{k \neq l}^A (-1)^{k+l} \left\{ \varphi_k(1) \varphi_l(2) - \varphi_l(1) \varphi_k(2) \right\} \psi_{\bar{k}\bar{l}}(\bar{1}, \bar{2})$$

Bei unabhängiger Summation über k und l erhält man:

$$\psi^{[0]}(1 \dots A) = \sqrt{\frac{1}{2(A(A-1))}} \sum_{k, l}^A (-1)^{k+l} \phi_{k, l}(1, 2) \psi_{\bar{k}, \bar{l}}(\bar{1}, \bar{2}) \quad (A4.5)$$

mit
$$\phi_{k, l}(1, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \varphi_k(1) \varphi_l(2) - \varphi_l(1) \varphi_k(2) \right\}$$

2. Auskopplung eines Teilchens mit Drehimpulskopplung

Nach den Vorbereitungen von 1. haben wir nur noch die Ersetzung $(-1)^k \rightarrow (-1)^{j_\alpha + m_\alpha}$ durchzuführen. α soll dabei künftig den Zustand bis auf die magnetische Quantenzahl bestimmen. Dann läßt sich schreiben:

$$\psi^{[0]}(1 \dots A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha, m_\alpha} (-1)^{1-m_\alpha-j_\alpha} \varphi_{m_\alpha}^{[j_\alpha]}(1) \psi_{\{j_\alpha, m_\alpha\}}^{[j_\alpha]}(\bar{1})$$

Wir erinnern uns an:

$$\begin{aligned} [\varphi_{(1)}^{[j_\alpha]} \times \psi_{(2 \dots A)}^{[j_\alpha]}]^{[0]} &= \sum_{m_\alpha} (j_\alpha, m_\alpha; j_\alpha, -m_\alpha | 00) \varphi_{m_\alpha}^{[j_\alpha]}(1) \psi_{-m_\alpha}^{[j_\alpha]}(2 \dots A) \\ (j_\alpha, m_\alpha; j_\alpha, -m_\alpha | 00) &= \frac{(-1)^{j_\alpha - m_\alpha}}{\hat{j}_\alpha} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\hat{j}_\alpha [\varphi_{(1)}^{[j_\alpha]} \times \psi_{(2 \dots A)}^{[j_\alpha]}]^{[0]} = \sum_{m_\alpha} (-1)^{j_\alpha - m_\alpha} \varphi_{m_\alpha}^{[j_\alpha]}(1) \psi_{-m_\alpha}^{[j_\alpha]}(2 \dots A)$$

Da wir bereits wissen, daß der Gesamtzustand $J = 0$ hat, gibt uns dies eine Phasenregel für $\psi_{\{j_\alpha, m_\alpha\}}^{[j_\alpha]}(\bar{1})$

$$(-1)^{1-m_\alpha-j_\alpha} \psi_{\{j_\alpha, m_\alpha\}}^{[j_\alpha]}(\bar{1}) = (-1)^{j_\alpha - m_\alpha} \varphi_{-m_\alpha}^{[j_\alpha]}(\bar{1})$$

D. h. der Zustand $\psi_{\{j_\alpha, m_\alpha\}}^{[j_\alpha]}(\bar{1})$ ist ein "1-Lochzustand".

Er trägt die magnetische Quantenzahl $-m_\alpha$.

Somit läßt sich schreiben:

$$\psi^{[0]}(1 \dots A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha} \hat{j}_\alpha [\varphi_{(1)}^{[j_\alpha]} \times \psi_{\alpha}^{[j_\alpha]}(\bar{1})]^{[0]} \quad (A4.6)$$

Die Erweiterung von (A4.6) auf isospinentartete Zustände ist trivial.

Man ersetzt:

$$\varphi_{\alpha}^{[j_d]} \longrightarrow \varphi_{\alpha}^{[j_d]} \chi^{[1/2]} = \varphi_{\alpha}^{[j_d][1/2]}$$

Die Wellenfunktion eines Spiegelkerns wie ^{16}O lautet dann:

$$\psi^{[0]}(1\dots A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha} \hat{j}_{\alpha} \hat{j}_{\alpha} \left[\varphi_{\alpha}^{[j_d]} \times \varphi_{\alpha}^{[1/2]} \right]^{[0][0]} \quad (\text{A4.7})$$

3. Auskopplung von zwei Teilchen

Hierzu gehen wir von (A4.5) aus und schreiben:

$$\Psi^{[0]} = \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ m_{j\alpha}, m_{j\beta} \text{ für } \alpha \neq \beta \\ m_{j\alpha} \geq m_{j\beta} \text{ für } \alpha = \beta}} (-1)^{j_\alpha + m_{j\alpha} + j_\beta + m_{j\beta}} \left\{ \varphi_{m_{j\alpha}}^{[j_\alpha]}(1) \varphi_{m_{j\beta}}^{[j_\beta]}(2) - \varphi_{m_{j\beta}}^{[j_\beta]}(1) \varphi_{m_{j\alpha}}^{[j_\alpha]}(2) \right\} \times \psi_{(\alpha, m_{j\alpha}; \beta, m_{j\beta})}(\bar{1}, \bar{2})$$

Dabei haben wir die Indizes α, β an den Einteilchenfunktionen weggelassen und die Eigenschaften von $\psi_{(\alpha, m_{j\alpha}; \beta, m_{j\beta})}$ unter Vertauschung der Quantenzahlsätze nicht weiter untersucht. Um zu einer Drehimpulskopplung zu kommen, koppeln wir zuerst die beiden Einteilchenfunktionen

$$\varphi_{m_{j\alpha}}^{[j_\alpha]}(1) \varphi_{m_{j\beta}}^{[j_\beta]}(2) = \sum_{\substack{j_{\alpha\beta} \\ m_{j_{\alpha\beta}}} } \langle j_\alpha, m_{j_\alpha}; j_\beta, m_{j_\beta} | j_{\alpha\beta}, m_{j_{\alpha\beta}} \rangle \left[\varphi_\alpha^{[j_\alpha]}(1) \times \varphi_\beta^{[j_\beta]}(2) \right]_{m_{j_{\alpha\beta}}}^{[j_{\alpha\beta}]}$$

Der Austauschterm kann mit dem gleichen Clebsch-Gordan-Koeffizienten und der Phase $(-1)^{j_\beta - j_\alpha - m_{j_{\alpha\beta}}}$ gekoppelt werden.

$$\Psi^{[0]} = \frac{1}{\sqrt{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha \leq \beta \\ j_{\alpha\beta}, m_{j_{\alpha\beta}}} } \left\{ \left[\varphi_\alpha^{[j_\alpha]}(1) \times \varphi_\beta^{[j_\beta]}(2) \right]_{m_{j_{\alpha\beta}}}^{[j_{\alpha\beta}]} - \left[\varphi_\alpha^{[j_\alpha]}(2) \times \varphi_\beta^{[j_\beta]}(1) \right]_{m_{j_{\alpha\beta}}}^{[j_{\alpha\beta}]} \right\} \times \sum_{\substack{m_{j\alpha}, m_{j\beta} \text{ für } \alpha \neq \beta \\ m_{j\alpha} \geq m_{j\beta} \text{ für } \alpha = \beta}} \langle j_\alpha, m_{j_\alpha}; j_\beta, m_{j_\beta} | j_{\alpha\beta}, m_{j_{\alpha\beta}} \rangle (-1)^{j_\alpha + m_{j_\alpha} + j_\beta + m_{j_\beta}} \psi_{(\alpha, m_{j_\alpha}; \beta, m_{j_\beta})}(\bar{1}, \bar{2})$$

Die zweite Summe dieser Formel läßt sich mit Hilfe der

Formel $(j_\alpha, m_{j_\alpha}; j_\beta, m_{j_\beta} | f_{\alpha\beta} M_{f_{\alpha\beta}}) = (-1)^{j_\alpha - j_\beta} (j_\alpha, -m_{j_\alpha}; j_\beta, m_{j_\beta} | f_{\alpha\beta}, -M_{f_{\alpha\beta}})$

und der für Lochfunktionen gewählten Phasenwahl umschreiben zu:

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{f_{\alpha\beta} - M_{f_{\alpha\beta}}} \sum_{\substack{m_{j_\alpha}, m_{j_\beta}, \alpha \neq \beta \\ m_{j_\alpha} \geq m_{j_\beta}, \alpha = \beta}} (j_\alpha, -m_{j_\alpha}; j_\beta, m_{j_\beta} | f_{\alpha\beta}, -M_{f_{\alpha\beta}}) \psi_{\substack{[j_\alpha] [j_\beta] \\ (-\bar{1}, \bar{2}) \\ -m_{j_\alpha}, -m_{j_\beta}}} \\
 &= \frac{(-1)^{f_{\alpha\beta} - M_{f_{\alpha\beta}}}}{\sqrt{1 + \delta_{\alpha\beta}}} \psi_{\substack{[f_{\alpha\beta}] \\ (-\bar{1}, \bar{2}) \\ -m_{j_\alpha}, -m_{j_\beta}}}
 \end{aligned}$$

Dabei trägt der Faktor $\frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{\alpha\beta}}}$ der Tatsache Rechnung,

daß die Summe über $m_{j_\alpha}, m_{j_\beta}$ für $\alpha = \beta$ durch $m_{j_\alpha} \geq m_{j_\beta}$

beschränkt ist. Damit bekommt man für $\psi_{\substack{[0] \\ 1 \dots A}}$:

$$\psi_{\substack{[0] \\ 1 \dots A}} = \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\substack{\alpha < \beta \\ f_{\alpha\beta}}} \hat{f}_{\alpha\beta} \left[\phi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(1,2) \times \psi_{\substack{[f_{\alpha\beta}] \\ (-\bar{1}, \bar{2})}} \right]_{\substack{[0] \\ 1 \dots A}} \quad (A4.8)$$

mit:

$$\phi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{\alpha\beta})}} \left\{ [\varphi_\alpha^{[j_\alpha]}(1) \times \varphi_\beta^{[j_\beta]}(2)] - [\varphi_\alpha^{[j_\alpha]}(2) \times \varphi_\beta^{[j_\beta]}(1)] \right\}$$

Dabei sind die Funktionen $\phi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(1,2)$ und $\psi_{\substack{[f_{\alpha\beta}] \\ (-\bar{1}, \bar{2})}}$ einzeln auf 1 normiert.

Erweiterung auf isospinentartete Zustände. Analog dem Übergang von (A4.6) zu (A4.7) läßt sich schreiben:

$$\psi^{[0][0]}(1 \dots A) = \sqrt{\frac{2}{A(A-1)}} \sum_{\alpha \neq \beta} \hat{f}_{\alpha\beta} \hat{T}_{\alpha\beta} \left[\phi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1,2) \times \psi_{2,\bar{\beta}}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(\bar{1},\bar{2}) \right]^{[0][0]} \quad (A4.9)$$

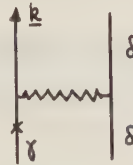
mit:

$$\phi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\delta_{\alpha\beta})}} \left\{ \left[\varphi_{\alpha}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1) \times \varphi_{\beta}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(2) \right] - \left[\varphi_{\alpha}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(2) \times \varphi_{\beta}^{[f_{\alpha\beta}][T_{\alpha\beta}]}(1) \right] \right\}$$

4. (A-1)-Teilchenwellenfunktion als Produkt der (A-2)-Teilchen-Corefunktion mit 1-Teilchenwellenfunktion

Für Prozesse, die über einen Zweiteilchenoperator auf einen (A-1)-Teilchenendzustand führen, ist es praktisch, die (A-1)-Teilchenwellenfunktion der Teilchen 2 bis A nach einer Summe gekoppelter (A-2)-Teilchen-corefunktionen der Teilchen 3 bis A mit einer Einteilchenwellenfunktion von Teilchen 2 zu entwickeln.

Man macht sich dies leicht am Beispiel der Struktur des Matrixelementes der Reaktion $A(\mu; n, \nu)B$ über einen Zweiteilchenoperator klar:



$$T_{fi} = \langle [\underline{k} \times \psi_{\bar{\gamma}}^{(1)}] | H_{int}(1,2) | [\phi_{\gamma\delta}^{(1,2)} \times \psi_{\bar{\gamma}\delta}^{(1,2)}] \rangle$$

Da der Endzustand aus einem (A-1)-Teilchen-Restkern und einem freien Nukleon besteht, wobei ein Nukleon des Restkerns an der Reaktion beteiligt ist, entwickelt man den Endzustand günstig nach diesem Nukleon:

$$\psi_{\bar{\gamma}}^{(1)} = \sum_{\delta} c^{(\gamma, \delta)} [\phi_{\delta}^{(1)} \times \psi_{\bar{\gamma}\delta}^{(1,2)}]$$

Unser Ziel ist es, die Koeffizienten $c^{(\gamma, \delta)}$ für den Fall zu bestimmen, daß der Ausgangskern Schalenabschluß besitzt.

Das Problem wird durch Vergleich der Formen (A4.5) und (A4.8) gelöst.

Um (A4.8) in der Gestalt (A4.5) schreiben zu können, hat man die Summation über α , β unabhängig zu machen und aus der Zweiteilchenfunktion $\phi_{\alpha\beta}^{[j_{\alpha\beta}]}$ Teilchen 1 auszukoppeln.

(i) unabhängige Summation

läßt sich rein formal ohne Schwierigkeit durch die Eretzung

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \longrightarrow \sum_{\alpha, \beta} \frac{1}{2} (1 + \delta_{\alpha\beta})$$

erreichen.

(ii) Umkopplung

$$[\varphi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]} \times \varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]}] \times \psi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{[j_{\alpha\beta}]} = [\varphi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]} \times [\varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]} \times \psi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{[j_{\alpha\beta}]}]]$$

Durch Gleichsetzen von (A4.5) und (A4.8) rechnet man aus:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha} \hat{j}_{\alpha} [\varphi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]} \times \psi_{\bar{\alpha}}^{[j_{\alpha}]}]^{[0]} &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha, \beta} \sqrt{\frac{2}{A-1}} \frac{1}{2} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \hat{j}_{\alpha\beta} \times \\ &\times [\phi_{\alpha\beta}^{[j_{\alpha\beta}]} \times \psi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{[j_{\alpha\beta}]}]^{[0]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha, \beta} \sqrt{\frac{2}{A-1}} \frac{1}{2} (1 + \delta_{\alpha\beta}) \hat{j}_{\alpha\beta} \frac{1}{\sqrt{2(1 + \delta_{\alpha\beta})}} \left\{ [\varphi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]} \times [\varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]} \times \psi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{[j_{\alpha\beta}]}]^{[0]} \right. \\ &\quad \left. + [\varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]} \times [\varphi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]} \times \psi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{[j_{\alpha\beta}]}]^{[0]}] \right\} \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Summationen über α und β ist man berechtigt, die Summationsindizes zu vertauschen.

$$\psi^{[0]}(1 \dots A) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{\alpha, \beta} \sqrt{\frac{(1+\delta_{\alpha\beta})}{(A-1)}} \hat{f}_{\alpha\beta} \left[\varphi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]}(1) \times \varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]}(2) \times \psi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(\bar{1}, \bar{2}) \right]^{[j_{\alpha}]}^{[0]}$$

Hieraus folgt sofort:

$$\psi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]}(\bar{1}) = \sum_{\beta, f_{\alpha\beta}} \frac{\hat{f}_{\alpha\beta}}{\hat{j}_{\alpha}} \sqrt{\frac{1+\delta_{\alpha\beta}}{A-1}} \left[\varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]}(2) \times \psi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(\bar{1}, \bar{2}) \right]^{[j_{\alpha}]}$$

Wegen der Antisymmetrisierung der Gesamtwellenfunktion

muß gelten:

$$\psi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(\bar{1}, \bar{2}) = -(-1)^{f_{\alpha} - j_{\alpha} - j_{\beta}} \psi_{\beta\alpha}^{[f_{\alpha\beta}]}(\bar{1}, \bar{2})$$

Die daraus sich ergebende Auswahlregel für $\alpha = \beta$

berücksichtigt man durch Hinzufügen des Faktors $\delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{1}{2}(1-(-1)^{f_{\alpha} - 2j_{\beta}})$

in der Einlochfunktion:

$$\psi_{\alpha}^{[j_{\alpha}]}(\bar{1}) = \frac{1}{j_{\alpha} \sqrt{A-1}} \sum_{\beta, f_{\alpha\beta}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}(1-(-1)^{f_{\alpha} - 2j_{\beta}})} \delta_{\alpha\beta} \times \quad (A4.10)$$

$$\times \left[\varphi_{\beta}^{[j_{\beta}]}(2) \times \psi_{\alpha\beta}^{[f_{\alpha\beta}]}(\bar{1}, \bar{2}) \right]^{[j_{\alpha}]}$$

Die Erweiterung dieser Form aus isospinentartete Zustände ist trivial:

$$\begin{aligned} \psi_{j_a, \tau_a}^{[j_a][1/2]} &= \frac{1}{\sqrt{A-1}} \sum_{\substack{\beta, j_{a\beta} \\ T_{a\beta}}} \hat{j}_{a\beta} \hat{T}_{a\beta} \sqrt{1 + \frac{1}{2} (1+(-1)^{j_{a\beta}+T_{a\beta}-2j_a})} \delta_{a\beta} \quad (A4.11) \\ &\times \left[\psi_{\beta}^{[j_{a\beta}][1/2]}(2) \times \psi_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{[j_{a\beta}][T_{a\beta}]}(1, \bar{2}) \right]_{m_{j_a}, \tau_a}^{[j_a][1/2]} \end{aligned}$$

Anhang 5

Matrizelemente für 1- und 2-Teilchenoperatoren im A-Nukleonen-System

Im folgenden sollen kurz die Formeln für Matrizelemente von 1- und 2-Teilchenoperatoren in ungekoppelten A-Nukleonen-Systemen hergeleitet werden. Dabei geht man von antisymmetrisierten Wellenfunktionen $|i\rangle, |f\rangle$ aus.

1. Matrizelement eines 1-Teilchenoperators

$$H_{fi} = \langle f | H | i \rangle \quad (A5.1)$$

wobei
$$H = \sum_k^A H(k) \quad (A5.2)$$

der Einteilchenoperator der Wechselwirkung ist, und

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P |P(\alpha_1 \dots \alpha_A)\rangle \quad (A5.3)$$

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{A!}} \sum_P (-1)^P |P(\beta_1 \dots \beta_A)\rangle$$

die auf 1 normierten Wellenfunktionen von Anfangs- bzw. Endzustand sind (dabei liegt die Reihenfolge der Teilchenindizes als "natürliche" Reihenfolge fest).

Also $|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_A\rangle := |\varphi_{\alpha_1}^{(1)} \varphi_{\alpha_2}^{(2)} \varphi_{\alpha_3}^{(3)} \dots \varphi_{\alpha_A}^{(A)}\rangle$

$$(-1)^P := \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \end{cases} \quad (A5.4)$$

Damit schreibt sich:

$$\langle f | H | i \rangle = \frac{1}{A!} \sum_{P, P'} (-1)^{P+P'} \langle P'(\beta_1 \dots \beta_A) | \sum_k^A H(k) | P(\alpha_1 \dots \alpha_A) \rangle \quad (A5.5)$$

$$\langle f | H | i \rangle = \frac{1}{(A-1)!} \sum_{P, P'} (-1)^{P+P'} \langle P'(\beta_1 \dots \beta_A) | H(1) | P(\alpha_1 \dots \alpha_A) \rangle \quad (A5.6)$$

da man wegen der Gleichberechtigung der Teilchenindizes

$$\sum_k^A H(k) \longrightarrow A H(1) \quad \text{ersetzen darf.}$$

$$H_{f1} := \frac{1}{(A-1)!} \sum_{P, P'} (-1)^{P_1 P'} M_{P' P} \quad (A5.7)$$

mit $M_{P' P} = \langle P'(\beta_1 \dots \beta_A) | H(1) | P(\alpha_1 \dots \alpha_A) \rangle$

$$M_{P' P} = m_{P' P} \prod_{k=2}^A \delta_{P'(\beta_k) P(\alpha_k)} \quad (A5.8)$$

mit $m_{P' P} = \langle P'(\beta_1) | H(1) | P(\alpha_1) \rangle$

Das Produkt von Kronecker- δ 's zeigt, wann $M_{P' P}$ von Null verschieden ist.

(i) Der Zustand $|f\rangle$ unterscheidet sich in zwei oder mehr Einteilchenzuständen vom Anfangszustand $|i\rangle$

Dann ist

$$M_{P' P} \equiv 0$$

(ii) Der Zustand $|f\rangle$ unterscheidet sich in genau einem Einteilchenzustand β_1 vom Anfangszustand $|i\rangle$

Dann ist $\prod_{k=2}^A \delta_{P'(\beta_k) P(\alpha_k)} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } P'(\beta_k) \neq \beta_1 \\ 1 & \text{wenn } P'(\beta_k) = P(\alpha_k) \end{cases}$

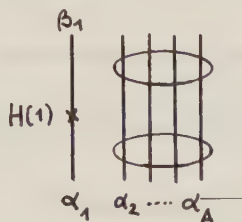
$$\sum_{P, P'} (-1)^{P_1 P} \prod_{k=2}^A \delta_{P'(\beta_k) P(\alpha_k)} = \sum_P (-1)^{2P} \prod_{k=2}^A \delta_{P(\alpha_k) P(\alpha_k)} = (A-1)! \quad (A5.9)$$

Damit bekommt man

$$H_{f1} = \langle \beta_1 | H(1) | \alpha_1 \rangle \quad (A5.10)$$

Das Restsystem wird von $H(1)$ nicht berührt.

Graphische Darstellung:

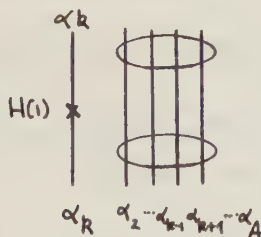


(iii) Der Zustand $|f\rangle$ unterscheidet sich nicht vom Anfangszustand $|i\rangle$

In diesem Fall erhält man mit den Überlegungen aus (i)

$$H_{fi} = \sum_{\alpha} \langle \alpha | H(1) | \alpha \rangle \quad (A5.11)$$

Graphische Darstellung:



2. Matricelement für einen Zwei-Teilchenoperator im

A: Nukleonensystem

Mit den Bezeichnungen aus 1. läßt sich schreiben:

$$H_{fi} = \frac{1}{A!} \sum_{P'P} (-1)^{P'P} \langle P'(\beta_1 \dots \beta_A) | \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} H(i,k) | P(\alpha_1 \dots \alpha_A) \rangle \quad (A5.12)$$

wobei $\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} H(i,k)$ der Wechselwirkungsoperator ist.

Nach der Ersetzung

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq k} H(i,k) \longrightarrow \frac{A(A-1)}{2} H(1,2) \quad (A5.13)$$

bekommt man analog zu Gleichung (A5.6) und (A5.7)

$$H_{fi} = \frac{1}{2(A-2)!} \sum_{P'P} (-1)^{P'P} M_{P'P} \quad (A5.14)$$

mit $M_{P'P} = \langle P'(\beta_1 \dots \beta_A) | H(1,2) | P(\alpha_1 \dots \alpha_A) \rangle$

wobei außerdem gilt:

$$M_{P'P} = m_{P'P} \prod_{k=3}^A \delta_{P'(\beta_k) P(\alpha_k)} \quad (A5.15)$$

$$m_{P'P} = \langle P'(\beta_1 \beta_2) | H(1,2) | P(\alpha_1 \alpha_2) \rangle$$

Auswertung von H_{fi} für Spezialfälle

(i) Anfangs- und Endzustand unterscheiden sich in drei oder mehr Einteilchenzuständen.

- (iii) Der Endzustand unterscheidet sich in genau einer Einteilchenwellenfunktion vom Anfangszustand.

$$\beta_1 \neq \alpha_1$$

$$\beta_i = \alpha_i; \quad i = 2, \dots, 4$$

Dann gilt für $M_{P',P}$ aus (A5.15):

$$M_{P',P} = m_{P',P} \cdot \prod_{i=3}^A \delta_{P'(\beta_i)P(\alpha_i)}$$

$$\prod_{i=3}^A \delta_{P'(\beta_i)P(\alpha_i)} = \begin{cases} 0 & \text{für } P'(\beta_1) \neq \beta_1; P(\alpha_1) \neq \alpha_1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A5.19})$$

Mit den Überlegungen aus (ii) berechnet man:

$$H_{fi} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^A \langle \beta_1 \alpha_k - \alpha_k \beta_1 | H(1,2) | \alpha_1 \alpha_k - \alpha_k \alpha_1 \rangle \quad (\text{A5.20})$$

- (iv) Der Endzustand unterscheidet sich nicht vom Anfangszustand.

Nach den obigen Rechnungen läßt sich die Formel sofort angeben:

$$H_{fi} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \langle \alpha_k \alpha_l - \alpha_l \alpha_k | H(1,2) | \alpha_k \alpha_l - \alpha_l \alpha_k \rangle \quad (\text{A5.21})$$

- (v) Vereinfachungen und graphische Darstellung für Zweiteilchenmatrixelemente

Falls

$$H(k,i) = H(i,k) \quad (\text{A5.22})$$

In diesem Fall liefern die Kronecker- δ 's des Restsystems immer die Null.

$H_{fi} \equiv 0$ für Änderung von mehr als zwei Einteilchenzuständen des Anfangszustandes.

(ii) Der Endzustand unterscheidet sich in genau zwei Einteilchenwellenfunktionen vom Anfangszustand.

$$\begin{aligned}\beta_1 &\neq \alpha_1 \\ \beta_2 &\neq \alpha_2 \\ \beta_i &= \alpha_i \quad ; \quad i = 3, \dots, A\end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\prod_{i=3}^A \delta_{P(\beta_i)P(\alpha_i)} = \begin{cases} 0 & \text{für alle } P(\beta_i) \in \{\beta_1, \beta_2\} \\ & \text{und } P(\alpha_i) \in \{\alpha_1, \alpha_2\} \\ 1 & \text{für } P(\beta_i) = P(\alpha_i) \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{A5.16})$$

Hiermit rechnet man aus:

$$\sum_P \prod_{i=3}^A \delta_{P(\alpha_i)P(\alpha_i)} = (A-2)! \quad (\text{A5.17})$$

Man setzt in (A5.14) bzw. (A5.25) ein und bekommt:

$$H_{fi} = \frac{1}{2} \langle \beta_1 \beta_2 - \beta_2 \beta_1 | H(1,2) | \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1 \rangle \quad (\text{A5.18})$$

Gilt, ist es erlaubt, die Antisymmetrisierung des Endzustandes (oder Anfangszustandes) wegen der Symmetrie des Operators wegzulassen. Der Faktor hebt sich dann weg. Man kann dann allgemein für Zweiteilchenmatrixelemente schreiben:

$$H_{fi} = M_D - M_A \quad (A5.23)$$

wobei

$$M_D = \langle \beta_1 \beta_2 | H(1,2) | \alpha_1 \alpha_2 \rangle$$

$$M_A = \langle \beta_1 \beta_2 | H(1,2) | \alpha_2 \alpha_1 \rangle$$

ist.

Graphisch lassen sich die Matrixelemente wie folgt darstellen:

$$M_D = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \end{array} \\ \text{---} H(1,2) \text{---} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_1 & \alpha_2 \\ \hline \end{array} \end{array} \quad M_A = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|c|} \hline \beta_1 & \beta_2 \\ \hline \end{array} \\ \text{---} H(1,2) \text{---} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \alpha_2 & \alpha_1 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Bemerkung:

Bei Benutzung drehimpulsklassifizierter Zustände (Anhang 4) ändert sich die Struktur der hier hergeleiteten Formeln nicht.

Anhang 6

Vektorkopplung und reduzierte Matricelemente

1. Vorbemerkung

Nach der elementaren Quantenmechanik der Drehimpulse lassen sich drehimpulsgekoppelte Matricelemente (bestehend aus gekoppelten Anfangs- und Endzuständen und irreduziblen sphärischem Tensoroperator) mittels Eckart-Wigner-Theorem auf ein reduziertes Matricelement (von magnetischen Quantenzahlen unabhängig) zurückführen. Es gilt:

$$\langle \psi_{M'}^{[J']} | T_m^{[q]} | \psi_M^{[J]} \rangle = (-1)^{J'+M'} (-1)^{2q} (-1)^{J'+q+J} \begin{pmatrix} J' & q & J \\ -M' & m & M \end{pmatrix} M_{\text{Red}} \quad (\text{A6.1})$$

mit
$$M_{\text{Red}} = [\psi^{[J']} | T^{[q]} | \psi^{[J]}]$$

Im reduzierten Matricelement treten die vektorgekoppelten A-Teilchenwellenfunktionen und der Tensoroperator $T^{[q]}$ auf. Durch Umkopplung von Drehimpulsen gelangt man zur Trennung der Koordinaten und Unterräume des Gesamtspinraumes, sodaß eine Zerlegung in ein Produkt von reduzierten Matricelementen von Ein- und Zweiteilchenmatricelementen entsteht. Die Ankopplung und Zerlegung des Matricelementes wird mit der graphischen Methode von Danos et al durchgeführt [Leh74].

Nach einer Angabe einiger Symbole und Formeln der graphischen Methode geben wir die Schemata für die in dieser Arbeit auftretenden reduzierten Matricelemente an. Im letzten Teil gehen wir kurz auf die Spinsummation und Mittelung ein.

2. Formeln und Symbole der graphischen Methode

2.1 Drehimpulskopplung

Mittels Glebsch-Gordan-Koeffizienten lassen sich zwei vom Winkel abhängige Wellenfunktionen $\psi_{m_1}^{[j_1]}(\Omega_1)$

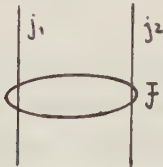
und $\psi_{m_2}^{[j_2]}(\Omega_2)$ zu Wellenfunktionen $\psi_M^{[J]}(\Omega_{12})$

zusammenkoppeln:

$$\begin{aligned} \psi_M^{[J]}(\Omega_{12}) &= \sum_{m_1, m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle \psi_{m_1}^{[j_1]}(\Omega_1) \psi_{m_2}^{[j_2]}(\Omega_2) \\ &= \left[\psi^{[j_1]}(\Omega_1) \times \psi^{[j_2]}(\Omega_2) \right]_M^{[J]} \end{aligned} \quad (A6.2)$$

(die symbolische Schreibweise zeigt, daß die Kenntnis über m_1 und m_2 bei der Kopplung gänzlich verloren geht!)

Graphische Darstellung der Kopplung:

$$\left[\psi^{[j_1]}(\Omega_1) \times \psi^{[j_2]}(\Omega_2) \right]_M^{[J]}$$


2.2 Umkopplung von Drehimpulsen

Wir gehen von einer aus vier einzelenen Funktionen

$\varphi^{[j_1]}, \dots, \varphi^{[j_4]}$ gekoppelten Funktion $\psi_M^{[J]}$ aus:

$$\psi_M^{[J]} = \left[\left[\varphi^{[j_1]} \times \varphi^{[j_2]} \right]^{[j_{12}]} \times \left[\varphi^{[j_3]} \times \varphi^{[j_4]} \right]^{[j_{34}]} \right]^{[J]}$$

Die Funktion $\psi_M^{[j]}$ ist wesentlich bestimmt durch ihr Kopplungsschema. Einen Zusammenhang zwischen dieser Kopplung der einzelnen Funktionen zu irgendeiner anderen Kopplung wird durch die $-j$ -Symbole vermittelt.

$$\left[\left[\begin{matrix} [j_1] & [j_2] \\ \varphi & \times \varphi \end{matrix} \right]^{[j_{12}]} \times \left[\begin{matrix} [j_3] & [j_4] \\ \varphi & \times \varphi \end{matrix} \right]^{[j_{34}]} \right]^{[j]}_M = \quad (A6.3)$$

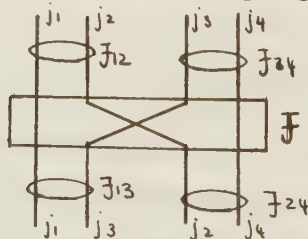
$$= \sum_{j_{12}, j_{34}} \left[\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{matrix} \right] \left[\begin{matrix} [j_{12}] & [j_{34}] \\ \varphi & \times \varphi \end{matrix} \right]^{[j_{12}]} \times \left[\begin{matrix} [j_{12}] & [j_{34}] \\ \varphi & \times \varphi \end{matrix} \right]^{[j_{34}]} \right]^{[j]}_M$$

$$\text{wobei } \left[\begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{matrix} \right] := \hat{j}_{12} \hat{j}_{34} \hat{j}_{13} \hat{j}_{24} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{matrix} \right\}$$

Dabei ist: $\hat{j} := \sqrt{2j+1}$

Das Symbol mit der geschwungenen Klammer ist das sogenannte 9-j-Symbol. Es weist besonders einfache Symmetrieeigenschaften auf, die hier jedoch nicht erörtert werden sollen.

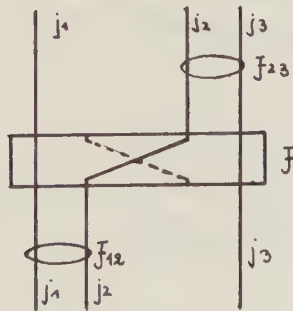
Graphische Darstellung der Umkopplung:



Man überzeugt sich leicht, daß durch Einführung der Linie mit dem Drehimpuls 0 auch Umkopplung von drei und weniger Drehimpulsen möglich ist:

$$\left[\varphi^{[j_1]} \times \left[\varphi^{[j_2]} \times \varphi^{[j_3]} \right]^{[j_{23}]} \right]^{[j]}_M = \sum_{j_{12}} \left[\begin{matrix} j_1 & 0 & j_1 \\ j_2 & j_3 & j_{23} \\ j_{12} & j_3 & j \end{matrix} \right] \left[\left[\varphi^{[j_1]} \times \varphi^{[j_2]} \right]^{[j_{12}]} \times \varphi^{[j_3]} \right]^{[j]}_M \quad (\text{A6.4})$$

Graphisch:



Umkopplung von drei Drehimpulsen wird i. A. durch das 3-j-Symbol definiert. Gleichung (A6.4) gibt danach den Zusammenhang zwischen 9-j Symbol mit einer Null und dem 3-j-Symbol an.

2.3 Produkt-Operatoren

Man rechnet sich für das Skalarprodukt von Vektoroperatoren aus:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sqrt{3} [A^{[1]} \times B^{[1]}]^{[0]} \quad (A6.5)$$

Die Schreibweise $A^{[1]}$ gibt an, daß $\vec{A}$ ein Tensor 1. Stufe ist und somit Drehimpulsänderungen $\Delta j = \pm 1, 0$ hervorrufen kann. Für das Vektorprodukt findet man:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \sqrt{2} [A^{[1]} \times B^{[1]}]^{[1]} \quad (A6.6)$$

Beispiele:

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = \hat{1} [\sigma^{[1]} \times \sigma^{[1]}]^{[0]} \quad (A6.7)$$

$$\vec{\sigma} \times \vec{\sigma} = \hat{\frac{1}{2}} [\sigma^{[1]} \times \sigma^{[1]}]^{[1]}$$

2.4 Einfache reduzierte Matrixelemente

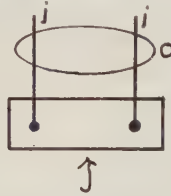
Ziel der Umkopplung von Wellenfunktionen und Tensoroperatoren ist es, zu reduzierten Matrixelementen zwischen Zuständen mit gleichen Koordinaten zu kommen. Die Umkopplung endet also bei reduzierten Einteilchenmatrixelementen.

(i) Im einfachsten Fall hat man das reduzierte Matrixelement zweier Wellenfunktionen zu bilden:

$$[\psi^{[j]} | \psi^{[j]}] = \int [\tilde{\psi}^{[j]} \times \psi^{[j]}]_0^{[0]} d\Omega = \hat{j} \quad (A6.8)$$

Dabei wurden von r abhängige Spezifikationen weggelassen!
 Da jedoch in der sphärischen Basis der Radius r separiert,
 treten die Matrixelemente der Radialfunktionen multipli-
 kativ hinzu,

Graphische Darstellung:



(ii) Reduziertes Matrixelement von $\bar{G}$

$$[X^{[1/2]} | \sigma^{[1]} | X^{[1/2]}] = i\sqrt{6} = i\hat{1}_2 \hat{1} \quad (A6.9)$$

(Man beachte: $\sigma^{[1]}$ führt nicht aus der Darstellung $[1/2]$ hinaus)

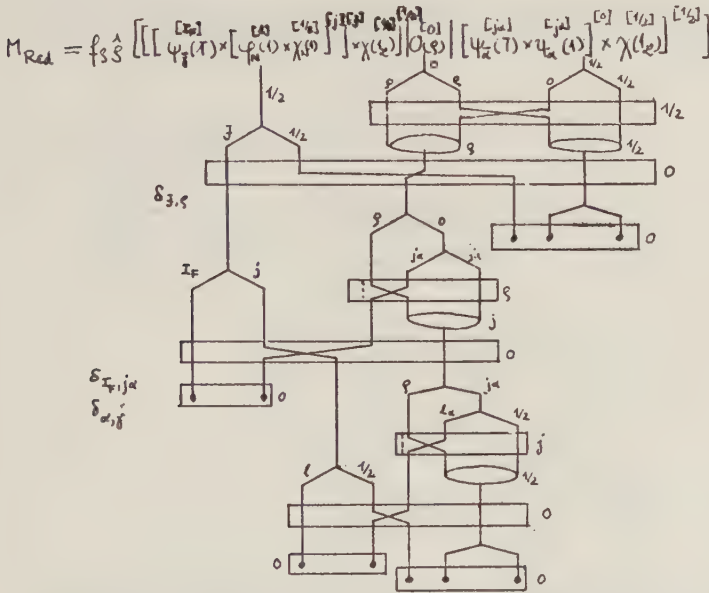
2,5 Q-Box

Das Matrixelement $[Y^{[1]}(\Omega) | Y^{[1]}(\Omega) | Y^{[1]}(\Omega)]$

dreier Kugelfunktionen mit gleichem Argument läßt sich nach dem Additionstheorem für Kugelfunktionen schreiben als:

$$[Y^{[1]}(\Omega) | Y^{[1]}(\Omega) | Y^{[1]}(\Omega)] = Q_{1,1}^{[1]} [Y^{[1]} | Y^{[1]}] \quad (A6.10)$$

(i) Reduziertes Matrixelement zu $A(\mu; n, \nu)$ direkt (Spin+Bahn)



Auswertung:
$$M_{\text{Red}} = \sum_f f_S \hat{S} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_F & I_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_F & j & s \\ I_F & j & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

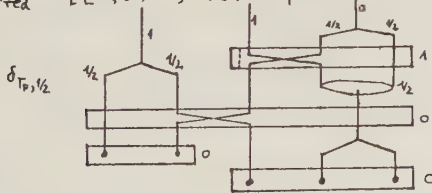
$$\hat{I}_F \hat{L}_F ([1/2 | 0^{(1)} | 1/2])^2 \cdot (j_{L_F}(k) | R_F)$$

(A6.11)

$$M_{\text{Red}} = f_S \hat{S} \hat{L}_F \hat{J} \left\{ \begin{matrix} j & I_F & p \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{matrix} \right\} (-)^{p+2I_F+2j+L_F+1/2} (j_{L_F}(k) | R_F) \delta_{j,1/2} \delta_{f,s} \delta_{j,I_F} \delta_{L_F,1/2} \delta_{L_F,1/2}$$

(iii) Reduziertes Isopin-Matrixelement zu $A(\mu, n, \nu)B$

$$M_{\text{red}} = \left[\left[\begin{matrix} \xi^{[1]} \\ \xi^{[1]} \times \xi^{[1]} \end{matrix} \right] \middle| \tau^{[1]} \middle| \left[\begin{matrix} \xi^{[1]} \\ \xi^{[1]} \times \xi^{[1]} \end{matrix} \right] \right]^{[1]}$$



Auswertung: $M_{\text{red}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi}_2 \cdot (i \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2) \delta_{T, 1/2} = i \hat{1} \delta_{T, 1/2} \quad (6.13)$

Spinmittelung und Summation

Die differentiellen Übergangswahrscheinlichkeiten sind entsprechend den Anfangs- und Endzuständen von den magnetischen Quantenzahlen der Zustände der ein- bzw. auslaufenden Teilchen abhängig. In sehr vielen Fällen ist man jedoch an Informationen über Spinstellungen nicht interessiert. Aus diesem Grunde ist man auf Spinmittelungen angewiesen. Dabei nimmt man an, daß der gemittelte Anfangszustand mit gleichem Gewicht alle Spinstellungen enthält. Das System zerfällt in irgendeinen magnetischen Unterzustand.

Die Mittelung erstreckt sich über Wahrscheinlichkeiten, wird also inkohärent durchgeführt, da die Spinmessung prinzipiell möglich ist. Damit erhält man die bekannte Formel:

$$\overline{|T_{fi}|^2}^{\text{spins}} = \frac{1}{\sum_i} \sum_{M_i, M_f} |T_{fi}|^2 \quad (\text{A6.19})$$

Hilfsformel zur Durchführung von Spinmittelungen: (Vollständigkeits-, Orthogonalitätsrelationen, Äquivalenzbeziehungen) finden sich in allen wesentlichen Arbeiten über Drehimpulse in der Quantenmechanik.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß mit den folgenden einfachen Formeln alle wesentlichen Schritte zur Vereinfachung des Matrixelementes bei Spinmittelung durchgeführt werden können.

Die Umkopplung von Drehimpulsen in zwei 3-j-Symbolen wird nötig um Unabhängigkeit von Spinsummen zu erreichen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = \sum_{(-1)} \gamma' \gamma - \delta - a' + 2b + b' + c + e - f$$

$$\times (\hat{d} \hat{e} \hat{f})^2 \left\{ \begin{matrix} a & a' & e \\ b & b' & f \\ c & c' & d \end{matrix} \right\} (\alpha - \alpha' - \epsilon) (\beta - \beta' - \varphi) (\gamma - \gamma' - \delta) (\epsilon \varphi - \delta) \quad (A6.20)$$

Sobald kohärente Summen über emittierte Teilchen gebildet werden, treten im Quadrat des gemittelten Matrixelementes Terme mit zwei Kugelflächenfunktionen auf. Diese lassen sich meist durch die Beziehung:

$$\sum_{\lambda \lambda'} (-1)^{\ell' - \lambda'} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ \lambda - \lambda' & -\Lambda \end{pmatrix} Y_{\lambda}^{[\ell]}(\hat{k}) Y_{\lambda'}^{[\ell']}(\hat{k}) = (-1)^{(\ell + \ell' + L)/2} \frac{\ell \ell'}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} \ell & \ell' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_{\Lambda}^{[\ell]}(\hat{k})^{\dagger} \quad (A6.21)$$

vereinfachen und wegen der Linearität der magnetischen Quantenzahlen immer auf Legendre-Polynome zurückführen. Die mit (A6.20) und (A6.21) erreichten Vereinfachungen des Matrixelementes führen auf Strukturen der Art:

$$\sum_{\gamma} \begin{pmatrix} j & j & F \\ \gamma - \gamma & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Terme dieser Gestalt werden mit der Beziehung}$$

$$\sum_{\gamma} \begin{pmatrix} j & j & F \\ \gamma - \gamma & 0 \end{pmatrix} (-1)^{j - \gamma} = \hat{j} \delta_{F,0} \quad (A6.22)$$

vereinfacht.

Anhang 7

Berechnung von Integralen des Typs $(R_r j_c(k) / R_\alpha R_\beta)$
und $(j_c(k) / R_\alpha R_\beta)$ unter Verwendung von
Oszillatorwellenfunktionen

1. Vorbemerkung

Bei Zweiteilchenmatrixelementen in Zero-Range treten Vier-Nukleonenvertizes der gleichen Koordinate auf. Bei Emission eines dieser Nukleonen treten Integrale des Typs $(R_r j_c(k) / R_\alpha R_\beta)$ auf, während man bei der Emission eines Deuterons auf die Integrale $(j_c(k) / R_\alpha R_\beta)$ geführt wird, wobei k den Recoil des Restkerns angibt. In einer Oszillatorbasis lassen sich diese Integrale leicht in analytischer Form angeben.

Im folgenden soll der Weg zu ihrer rekursiven Berechnung skizziert und einige dieser Integrale selbst angegeben werden.

2. Lösungsmethode für die $(R_r j_c(k) / R_\alpha R_\beta)$

Die betrachteten Integranden zerfallen in einen Exponentialfaktor $\exp(-\frac{1}{2}(\frac{r}{a})^2)$, Polymome in r und die Besselfunktionen, die selbst Polymome in den trigonometrischen Funktionen sind. Dadurch ist eine Zerlegung jedes dieser Integrale in eine Reihe mit Integralen des Typs:

$$f_{n+1} = \int_0^{\infty} \xi^n w_n(ka\xi) (3\xi e^{-\frac{3}{2}\xi^2}) d\xi$$

$$\text{mit } w_n = \begin{cases} \sin(ka\xi) & n \text{ gerade} \\ \cos(ka\xi) & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (\text{A7.1})$$

möglich.

Diese Integrale sind rekursiv lösbar.

$$f_{n+1} = \frac{n}{3} f_{n-1} + (-1)^n p f_n \quad \text{mit } p = \frac{ka}{3} \quad (\text{A7.2})$$

(Beweis durch Nachrechnen!)

$$f_0 = \int_0^{\infty} \cos(ka\xi) (3\xi e^{-\frac{3}{2}\xi^2}) d\xi$$

$$f_0 = 3g_0$$

$$g_0 = \sqrt{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{3}{2}p^2}$$

(A7.3)

Die Berechnung der $(R_j | R_\alpha | R_\beta)$ geschieht nun durch eine Zerlegung der Integrale:

$$(R_j | R_\alpha | R_\beta) = \sum_n a_n^{R, \alpha \beta} f_n \quad (\text{A7.4})$$

Im folgenden geben wir einige der f_k an.

$$f_1 = p f_0$$

$$f_2 = \left(\frac{1}{3} - p^2\right) f_0$$

$$f_3 = (1 - p^2) p f_0$$

$$f_4 = \left(\frac{1}{3} - 2p^2 + p^4\right) f_0$$

$$f_5 = \frac{1}{3} (5 - 10p^2 + 3p^4) p f_0$$

$$f_6 = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{3} - 15p^2 + 15p^4 - 3p^6\right) f_0$$

$$f_7 = \frac{1}{3} \left(\frac{35}{3} - 35p^2 + 21p^4 - 3p^6\right) p f_0$$

$$f_8 = \frac{1}{9} \left(\frac{35}{3} - 140p^2 + 210p^4 - 84p^6 + 9p^8\right) f_0$$

3. Auswertung der $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ell}(k)$ mit Hilfe der f_k

Auswertung bis $\ell = 2$ bzw. 3 für Radialwellenfunktionen

$\{1s, 1p, 2s, 1d\}$

$$R_{1s} = \frac{2}{\pi^{1/4} a^{3/2}} e^{-\xi/2} ; R_{1p} = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{3/2}} \sqrt{\frac{8}{3}} \xi e^{-\xi/2}$$

$$R_{2s} = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{3/2}} \sqrt{\frac{8}{3}} (\xi^2 - \frac{3}{2}) e^{-\xi/2} ; R_{1d} = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{3/2}} \frac{4}{\sqrt{15}} \xi^2 e^{-\xi/2}$$

$$\xi = r/a$$

a Oszillatorparameter.

Besselfunktionen:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$$

$$j_2(x) = \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3}{x^2} \cos x ; j_3(x) = \left(\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^2}\right) \sin x + \left(-\frac{15}{x^3} + \frac{1}{x}\right) \cos x$$

3. a) Integrale vom Typ $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ell}(k)$ bei Beschränkung auf

$\{1p, 1s\}$

$$\ell=0$$

$$R_{(1s)^3}^0 = c_0 \frac{8}{3} g_0 ; R_{(1p)^2(1s)}^0 = c_0 \cdot \frac{16}{3} \frac{1}{3} (1-p^2) g_0$$

$$\ell=1$$

$$R_{(1p)(1s)^2}^1 = c_0 \cdot 4 \sqrt{\frac{8}{3}} p g_0 ; R_{(1p)^3}^1 = c_0 \left(\frac{8}{3}\right)^{3/2} \frac{1}{3} (\frac{5}{3} - p^2) p g_0$$

$$c_0 = \frac{1}{\pi^{1/4} a^{3/2}}$$

3.b) Integrale vom Typ $R'_{\alpha\beta}(k)$ bei Beschränkung auf $\{1s, 1p, 1d, 2s\}$

A: Genau eine Radialfunktion aus $\{1d, 2s\}$

$l=0$

$$R'_{2s,1s} = \sqrt{\frac{3}{2}} c_1 \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} - p^2\right) g_0$$

$$R'_{2s,1p} = \sqrt{\frac{2}{3}} c_1 \frac{1}{18} (1 + 11p^2 + 6p^4) g_0$$

$$R'_{1d,1p} = \sqrt{\frac{2}{15}} c_1 \frac{1}{9} (5 - 10p^2 + 3p^4) g_0$$

$l=1$

$$R'_{2s,1s,1p} = c_1 \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} - 3p^2\right) p g_0$$

$$R'_{1d,1p,1s} = \sqrt{\frac{2}{5}} c_1 \frac{1}{9} (5 - 3p^2) p g_0$$

$l=2$

$$R'_{1d,1p} = \sqrt{\frac{2}{15}} c_1 \frac{1}{9} (7 - 3p^2) p^2 g_0$$

$$R'_{1s,1p} = \sqrt{\frac{2}{3}} c_1 \frac{1}{9} \left(\frac{5}{2} - 3p^2\right) p^2 g_0$$

$$R'_{1d,1s} = \sqrt{\frac{3}{15}} c_1 \left(-\frac{1}{3}\right) p^2 g_0$$

$l=3$

$$R'_{1d,1p,1s} = \sqrt{\frac{2}{5}} c_1 \frac{1}{3} p^3 g_0$$

$$c_1 = \frac{16}{3 \pi^{3/4} a^{3/2}}$$

3.c) Integrale vom Typ $R_{\alpha\beta\gamma}^{\ell}$ mit mindestens zwei
Radialfunktionen aus $\{1d, 2s\}$

$\ell=0$

$$R_{(1d)^2, 1s}^0 = \frac{2}{5} c_1 \cdot \frac{1}{3} (5 - 10p^2 + 3p^4) g_0$$

$$R_{(1d)^2, 2s}^0 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} c_1 \frac{1}{9} \left(\frac{25}{6} - 20p^2 + \frac{33}{2} p^4 - 3p^6 \right) g_0$$

$\ell=1$

$$R_{1d, 2s, 1p}^1 = \frac{2}{115} c_1 \frac{1}{54} (25 - 57p^2 + 18p^4) p g_0$$

$$R_{(1d)^2, 1p}^1 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} c_1 \frac{1}{9} \left(\frac{35}{3} - 14p^2 + 3p^4 \right) p g_0$$

$\ell=2$

$$R_{1d, 2s, 1s}^2 = \sqrt{\frac{2}{5}} c_1 (-2) p^2 g_0$$

$$R_{(1d)^2, 2s}^2 = \frac{2}{\sqrt{15}} c_1 (-3p^2 + p^4) p^2 g_0$$

$$R_{(1d)^2, 1s}^2 = \frac{2}{5} c_1 \frac{1}{3} \left(\frac{7}{3} - p^2 \right) p^2 g_0$$

$$R_{(1d)^2, 2s}^2 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2}{3}} c_1 \left(\frac{7}{6} - \frac{3}{2} p^2 + p^4 \right) p^2 g_0$$

$$R_{(1d)^3}^2 = \frac{4}{5\sqrt{15}} c_1 \left(\frac{7}{3} - 3p^2 + \frac{1}{3} p^4 \right) p^2 g_0$$

$$c_1 = \frac{16}{3\pi^{3/4} a^{3/2}}$$

4. Integrale des Typs $(j_k(\xi)|R_n R_n)$

Die Herleitung analytischer Ausdrücke für die Funktionen hat das gleiche Schema wie im Falle der $R_{n,p}^{\epsilon}(\xi)$.

Die den Beziehungen (A7.1) bis (A7.3) entsprechenden

Gleichungen sind hier:

$$h_{n+1} = \int \xi^n w_n(2p\xi) (2\xi e^{-\xi^2}) d\xi$$

$$\text{mit } w_n = \begin{cases} \sin(2p\xi) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \cos(2p\xi) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}, p = ka/2 \quad (\text{A7.5})$$

Rekursionsformel:

$$h_{n+1} = \frac{n}{2} h_{n-1} + (-1)^n p h_n$$

$$h_0 = \sqrt{\pi} e^{-p^2} \quad (\text{A7.6})$$

Wir geben die niedrigsten h_k an:

$$h_1 = p h_0$$

$$h_2 = (\frac{1}{2} - p^2) h_0$$

$$h_3 = (\frac{3}{2} - p^2) p h_0$$

$$h_4 = (\frac{3}{4} - 3p^2 + p^4) h_0$$

$$h_5 = (\frac{15}{4} - 5p^2 + p^4) p h_0$$

$$h_6 = (\frac{15}{8} - \frac{45}{4} p^2 + \frac{15}{2} p^4 - p^6) h_0$$

$$h_7 = (\frac{105}{8} - \frac{105}{4} p^2 + \frac{21}{2} p^4 - p^6) p h_0$$

5. Integrale vom Typ $(j, k) / R, R_A$ bei Beschränkung auf $(1p, 1s, 1d, 2s)$

$$R_{(1s)^2}^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} h_0$$

$$R_{(1p)^2}^0 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{3} - p^2 \right) h_0$$

$$R_{(1s)(1p)}^1 = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} p h_0$$

$$R_{(1p)^2}^2 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} p^2 h_0$$

$$R_{(1s)(2s)}^0 = -\sqrt{\frac{2}{3\pi}} p^2 h_0$$

$$R_{(1p)(1d)}^1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{6\pi}} \left(\frac{5}{2} - p^2 \right) p h_0$$

$$R_{(1s)(1d)}^2 = \frac{2}{\sqrt{16\pi}} p^4 h_0$$

$$R_{(1p)(1d)}^3 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{5\pi}} p^3 h_0$$

$$R_{(2s)^2}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{4}{3} p^2 + \frac{2}{3} p^4 \right) h_0$$

$$R_{(2s)(1d)}^2 = \sqrt{\frac{2}{5\pi}} \frac{2}{3} (2 - p^2) p^2 h_0$$

$$R_{(1d)^2}^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{4}{3} p^2 + \frac{4}{15} p^4 \right) h_0$$

$$R_{(1d)^2}^2 = \frac{2}{15\sqrt{\pi}} (7 - 2p^2) p^2 h_0$$

Literaturverzeichnis

- Bac 72 H. Backe et al; Nucl. Phys. A 189 (1972) 472-512
- Bas 71 G. Backenstoß et al; Nucl. Phys. A 162 (1971) 541-551
- Bal 64 V.V. Balashov et al; Phys. Lett. 2, 2 (1964) 168
- Bar 64 J. Barlow et al; Phys.Lett. 2, 1 (1964) 84
- Bel 73 Y.I. Bely et al; Nucl. Phys. A 204 (1973) 357-370
- Bjo 66 J. D. Bjorken and S. D. Drell; "Relativistische
Quantenmechanik", Mannheim 1966
- Bli 73 R. J. Blin-Stoyle; "Fundamental Interactions and
the Nucleus", Amsterdam 1973
- Blu 72 B. Blum et al; Nucl. Phys. A 206 (1972) 321-331
- Bog 69 A. Bogan jr; Nucl. Phys. B 12 (1969) 80-109
- Bun 69 G.G. Bunatyan; Sov. J. Nucl. Phys. 3, 5 (1966) 613
- Bun 70 G.G. Bunatyan et al; Sov.J.Nucl.Phys. 11, 4 (1970) 444
- Bun 71 G.G. Bunatyan et al; Sov.J.Nucl.Phys. 15, 5 (1971) 526
- Cle 65 C.F. Clement et al; Nucl. Phys. 66 (1965) 273-292
- Chu 70/1 K.N. Chung et al; Phys. Lett. 32B (1970) 536
- Chu 70/2 K.N. Chung et al; Z. Phys. 240 (1970) 195-216
- Coh 64 R. Cohen et al; Nucl. Phys. 57 (1964) 255
- Con 47 Conversi, Pancini and Piccioni; Phys. Rev. 71 (1947) 209
- Dev 72 V. Devanathan et al; Ann. Phys. 72 (1972) 428-444
- Dil 73 M. Dillig et al; Phys. Lett. 44 B (1973) 484
- Edm 60 Edmonds "Drehimpulse in der Quantenmechanik"
Mannheim 64
- Era 72 R.A. Eramzhyan and V.N. Fetisov; Nucl. Phys. B 39
(1972) 216-226
- Era 73 R. A. Eramzhyan and Y. A. Salganic; Nucl. Phys.
A 207 (1973) 609-618

- Evs 69 V.S. Evseev et al; Phys. Lett. 28 B,8 (1969) 553
- Evs 73 V.S. Evseev and V.S. Roganov; Sov.J.Nucl. Phys. 17,5,
528-530 (1973)
- Fes 74 H. Feshbach and A. de Shalit; Theor. Nucl. Phys. Vol.I:
Nucl. Structure; New York 1974
- Fuj 59 A. Fuji and Primakoff; Nuovo Cim. 12 (1959) 1240
- Fuj 68 A. Fuji et al; Suppl. Progr. Nucl. Phys. Extra Number
(1969) 303
- Gou 73 B. Goulard and J. Joseph; Phys. Lett. 45 B (1973) 27
- Gre 69 A.M. Green and M. Rho; Nucl. Phys. A 130 (1969) 112-118
- Hec 75 P. Hecking; Dissertation, Erlangen 1975
- Hil 72 L.L. Hilland, H. Überall; Nucl.Phys. A 190 (1972) 341
- Hod 63 P.E. Hodgson; The Optical Model of Elastic Scattering,
Oxford 1963
- Hof 73 H.M. Hofmann; Nucl. Phys. A 209 (1973) 233-244
- Hok 73 Q. Ho-Kim; Phys. Rev. 8, 5 (1973) 1574-1584
- Hub 70 M.G. Huber; Ann. Phys. 5 (1970) 239
- Igo 71 P. Igo-Klemenens et al; Phys. Lett. 34 b, 4 (1971) 286
- Jas 55 R. Jastrow; Phys. Rev. 98 (1955) 1479
- Kap 58 S.N. Kaplan et al; Phys. Rev. 112, 3 (1958) 968
- Kap 69 S.N. Kaplan et al; Phys. Rev. Lett. 22, 15 (1969) 795
- Kis 63 H.R. Kissener et al; Nucl. Phys. A 207 (1963) 78-90
- Kle 65 R. Klein et al; Phys. Rev. 138, 1B (1965) 86
- Leh 74 D. R. Lehmann and J. S. O'Connell; "Graphical
Recoupling of Angular Momenta"; NBSMA 6

- Luy 63 Luyten et al; Nucl. Phys. 41 (1963) 236-274
- McD 65 B. MacDonald et al; Phys. Rev. 139, 5B (1965) 1253
- Muk 71 N.C. Mukhopadhyay and M.H. Macforlane; Phys. Rev. Lett. 27, 26 (1971) 1823
- Muk 73 N.C. Mukhopadhyay; Phys. Lett. 44 B (1973) 33
- Pet 71 C. Petitejean et al; Nucl. Phys. A 178 (1971) 193-200
- Pik 71 C.A. Piketty and J. Proculur; Nucl. Phys. B 26 (1971) 390-412
- Ple 71 M.E. Plett and S.E. Sobottka; Phys. Rev. C3,3 (1971) 1003
- Pra 69 T.A.E.C. Pratt; Nuovo Cim. 61, B1 (1969) 119
- Rod 67 L.S. Rodberg and R.M. Thaler, "Introduction to the Quantum Theory of Scattering", Academic Press, New York 1967
- Ros 73 L. M. Rosenstein and I. S. Hammermann; Phys. Rev. C, 8 (1973) 603
- Sch 73 W. V. Schröder; Thesis 1973
- Sin 62 P. Singer; Nuovo Cim. 23, 4 (1962) 669
- Sob 68 S.E. Sobottka and E.L. Willis; Phys. Rev. Lett. 20, 12 (1968) 596
- Sun 68/1 R.A. Sundelin et al; Phys. Rev. Lett. 20, 21 (1968) 1198
- Sun 68/2 R.A. Sundelin et al; Phys. Rev. Lett. 20, 21 (1968) 1201
- Tol 59 H.A. Tolhoek; Nucl. Phys. 10 (1959) 606-619
- Wal 68 G.E. Walker; Selected Topics in Intermediate Energy Physics, 1971 Mount Tremblant
- Wan 72 W.L. Wang and C.M. Shakin; Phys. Rev. C, 5, 6 (1972) 1898
- Wei 67 A. R. Weissenberg; "Muons", North Holland 1967

- Wei 72 W. Weise; Nucl. Phys. A 193 (1972) 625-642
- Woj 72/1 I. Wojtkowska et al; Sov.J.Nucl.Phys. 14, 3 (1972) 349
- Woj 72/2 I. Wojtkowska et al; Sov.J.Nucl.Phys. 15, 5 (1972) 523
- Woj 72/3 I. Wojtkowska et al; Sov.J.Nucl.Phys. 15, 6 (1972) 639
- Wu 66 C. S. Wu and S. A. Moszkowski; "Beta Decay";
New York 1966
- Wyc 69 S. Wycech; Nucl. Phys. B 14 (1969) 133-142

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. M.G. Huber, danke ich für die Anregung zu dieser interessanten Untersuchung und sein Interesse am Fortgang der Arbeit.

Danken möchte ich an dieser Stelle auch den Kollegen und Freunden aus dem Institut für ihre stete Diskussionsbereitschaft, sachlichen Hinweise und ihre Unterstützung.

Dabei seien hervorgehoben Dr. Wolfram Weise und Dr. Manfred Dillig, sowie Herr Dr. H.M. Hofmann, dessen Diskussionsfreude und sachlicher Kenntnis es zu verdanken ist, daß die physikalischen Aussagen zu einer präzisen Formulierung gelangten. Den Herren Dipl. Phys. Werner Schneider und Dipl. Phys. Ludwig Trautmann verdanke ich wertvolle Hinweise zur Beherrschung der Drehimpulsalgebra.

Nicht zu vergessen sei an dieser Stelle auch Frau E. Haagen, die sich darum bemüht hat, aus einem Manuskript eine lesbare Arbeit herzustellen.

Lebenslauf

Jürgen Richter

7.7.1944	Geburt in Ilmenau (Kreis Arnstadt) als Sohn des Regierungsrates Dr.jur. Wilhelm Richter und seiner Frau Ruth
1951	Einschulung in Kapellen bei Moers am Niederrhein
1955- 1965	Gymnasium-Adolfinum und Abitur (Februar 1965) in Moers am Niederrhein
1965- 1967	Studium der Physik in München (Vordiplom am 20.11.1967)
1967- 1971	Studium der Physik in Erlangen (Diplom in Theoretischer Physik bei Prof.Volz)
1970	Heirat, Eva Reuß aus Fürth (30.4.70)
Seit 1971	Tätigkeit am Lehrstuhl Prof. M.G. Huber
1971- 1973	Grafög
Seit 1973	Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Lehrstuhl
1975	Geburt meiner Tochter Katja (27.9.1975)

Offsetdruckerei HOGI, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, Tel. 22990